

**GABARITO MATEMÁTICA**

**Questão 1**

Dada a matriz

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

calcule  $M^{2020} + M^{2022} + M^{2024} + M^{2025} + M^{2029}$ .

**Gabarito**

Vamos calcular o padrão:

$$M^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

Assim:

$$M^4 = -M, \quad M^5 = -M^2, \quad M^6 = I$$

A soma pedida é:

$$M^{2020}(I + M^2 + M^4 + M^5 + M^3) = M^{2020}(I + M^2 - M - M^2 + M^3) = -M^{2021}$$

$$= -M^5 = M^2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

**Questão 2**

Seja  $i$  tal que  $i^2 = -1$ . Determine a área do triângulo no plano complexo cujos vértices são as raízes da equação

$$\left(z - \frac{3i}{2}\right)^3 = -27i$$

**Gabarito**

$$\left(z - \frac{3i}{2}\right)^3 = -27i = 27 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

Da radiciação de De Moivre:

$$z - \frac{3i}{2} = 3 \operatorname{cis} \left( \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right)$$

Para  $k = 0$ :

$$z_0 = \frac{3i}{2} + 3 \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3i}{2} + 3i = \frac{9i}{2}$$

Para  $k = 1$ :

$$z_1 = \frac{3i}{2} + 3 \operatorname{cis} \left( \frac{7\pi}{6} \right) = \frac{3i}{2} + 3 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Para  $k = 2$ :

$$z_2 = \frac{3i}{2} + 3 \operatorname{cis} \left( \frac{11\pi}{6} \right) = \frac{3i}{2} + 3 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Assim o triângulo com os vértices  $z_0$ ,  $z_1$  e  $z_2$  tem base  $3\sqrt{3}$  e altura  $\frac{9}{2}$ .

Então a área do triângulo é  $3\sqrt{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{27\sqrt{3}}{4}}$ .

### Questão 3

Dada a equação abaixo onde o valor de  $\alpha$  é um número real

$$\frac{\alpha \cos(x)}{2 \cos(2x) - 1} = \frac{\alpha + \operatorname{sen}(x)}{(\cos^2(x) - 3 \operatorname{sen}^2(x)) \operatorname{tg}(x)}$$

Determine:

- os valores de  $\alpha$  para os quais a equação admite solução;
- as soluções, em radianos, da equação em função de  $\alpha$ .

### Gabarito

Usando que  $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$  e que  $\cos^2(x) - 3 \operatorname{sen}^2(x) = 4 \cos^2(x) - 3$ , temos:

$$\alpha \cdot \cos x = \frac{\alpha + \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$$

Daí,

$$\alpha = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x) - 1}$$

Agora precisamos limitar o  $\alpha$  baseado no seno e para isso temos que:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Como  $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1 \rightarrow \alpha \leq \frac{1}{2}$

Agora precisamos achar as restrições:

$$4 \cos^2 x - 3 \neq 0 \rightarrow \cos^2 x \neq \frac{3}{4} \rightarrow \operatorname{sen}^2 x \neq \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{sen} x \neq \frac{1}{2} \text{ e } \operatorname{sen} x \neq -\frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\alpha \neq -1 \text{ e } \alpha \neq 1/3$$

$$\operatorname{tg} x \neq 0 \rightarrow \operatorname{sen} x \neq 0 \rightarrow \alpha \neq 0$$

Para a tangente existir:  $\cos x \neq 0 \rightarrow \operatorname{sen} x \neq 1$  ou  $\operatorname{sen} x \neq -1 \rightarrow \alpha \neq \frac{1}{2}$



Assim a resposta é:  $\left\{a < \frac{1}{2} - \{0, 1/3, -1\}\right\}$

b)  $x = \arcsen\left(\frac{a}{a-1}\right) + 2k\pi \cup \left(\pi - \arcsen\left(\frac{a}{a-1}\right)\right) + 2k\pi$

#### Questão 4

Para  $n$  natural positivo, o número  $O_n$  é definido como a soma dos  $n$  primeiros termos da progressão aritmética de razão 6 iniciada em 1. Dos 2024 primeiros números  $O_n$ , quantos apresentam resto 1 na divisão por 8?

#### Gabarito

Aplicando a soma da PG:

$$O_n = \left(\frac{1 + 1 + (n-1) \cdot 6}{2}\right) \cdot n = (3n-2) \cdot n$$

Analisando agora a congruência por 8:

$$n \equiv 1 \rightarrow O_n \equiv 1 \pmod{8}$$

$$n \equiv 2 \rightarrow O_n \equiv 0 \pmod{8}$$

$$n \equiv 3 \rightarrow O_n \equiv 5 \pmod{8}$$

$$n \equiv 4 \rightarrow O_n \equiv 0 \pmod{8}$$

$$n \equiv 5 \rightarrow O_n \equiv 1 \pmod{8}$$

$$n \equiv 6 \rightarrow O_n \equiv 0 \pmod{8}$$

$$n \equiv 7 \rightarrow O_n \equiv 5 \pmod{8}$$

$$n \equiv 0 \rightarrow O_n \equiv 0 \pmod{8}$$

Logo,  $n$  precisa ter resto 1 ou 5 na divisão por 8 e assim há  $\frac{2024}{8} \cdot 2 = \boxed{506}$  valores.

#### Questão 5

Para cada número inteiro  $k \geq 1$ , seja

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}n(n+1)}$$

Determine o menor valor de  $k$  para o qual

$$|S_k - 1| < \frac{265}{4608}$$

**Gabarito**

$$\begin{aligned}
 S_k &= \sum_{n=1}^k \frac{2^n + (n^2 + n)}{2^{n+1} \cdot n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left[ \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{2^{n+1}} \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{k+1} \right] + \frac{\frac{1}{4} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^k - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^k - 1 \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{2(k+1)} - \left( \frac{1}{2} \right)^{k+1}
 \end{aligned}$$

O enunciado pede

$$|S_k - 1| = \left| -\frac{1}{2(k+1)} - \left( \frac{1}{2} \right)^{k+1} \right| = \frac{1}{2(k+1)} + \left( \frac{1}{2} \right)^{k+1}$$

Assim,  $\frac{1}{2(k+1)} + \left( \frac{1}{2} \right)^{k+1} < \frac{265}{4608} < \frac{1}{17}$ .

Note que para  $k = 8 \rightarrow \frac{1}{18} + \frac{1}{512} = \frac{265}{4608}$ , que é o caso de igualdade, e a expressão é decrescente em  $k$ , assim o menor  $k$  possível é **9**.

**Questão 6**

João nasceu no ano  $n$  e está prestando vestibular para o IME em 2023. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  conjuntos de inteiros positivos tais que  $|A| = |B| + 4$ . Sabe-se que há  $n$  funções estritamente crescentes de  $A$  para  $C$ , bem como de  $B$  para  $C$ .

Observações:

- $|S|$  representa o número de elementos do conjunto  $S$ ;
- uma função é estritamente crescente quando  $x_1 < x_2$  implica  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Diante do exposto, determine:

- o número de funções  $f$  estritamente crescentes de  $A$  para  $C$  em função de  $|A|$  e  $|C|$ ;
- o ano no qual João nasceu.

**Gabarito**

**a)**

Para definir uma função estritamente crescente de  $A$  para  $C$ , basta selecionarmos os elementos do conjunto imagem, já que haverá apenas uma maneira de relacionar os elementos.

Sendo assim, a resposta será:  $\binom{|C|}{|A|}$

**b)**

Do enunciado:

$$\binom{|C|}{|A|} = \binom{|C|}{|B|} \rightarrow \binom{|C|}{|B|+4} = \binom{|C|}{|B|}$$

Com isso, as combinações são complementares e assim:

$$|C| = 2|B| + 4$$

Temos então que  $n = \binom{2|B|+4}{|B|}$

Se  $|B| = 4 \rightarrow n = \binom{12}{4} = 495$ , que não pode

Se  $|B| = 5 \rightarrow n = \binom{14}{5} = 2002$ , que funciona



Se  $|B| = 6 \rightarrow n = \binom{16}{6} = 8008$ , que não pode

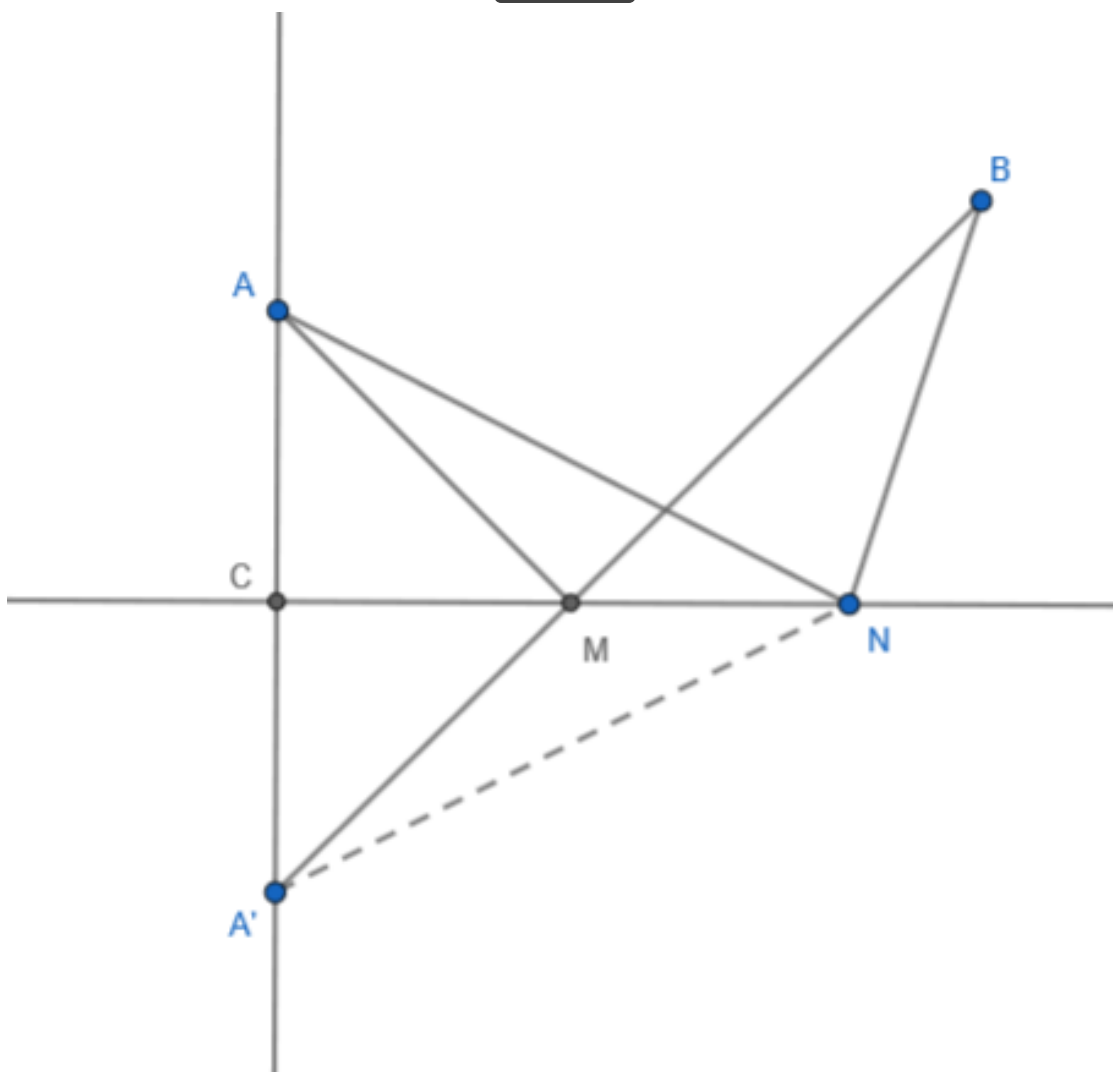
Assim, a única solução é:

### Questão 7

Dado um plano  $\pi$  e uma reta  $r$  nele contida, sejam  $A$  e  $B$  pertencentes a  $\pi$  dois pontos em um mesmo semiplano definido por  $r$ . O ponto  $A'$  é o simétrico a  $A$  em relação à reta  $r$ . Os segmentos de reta  $AA'$  e  $A'B$  interceptam a reta  $r$  nos pontos  $C$  e  $M$ , respectivamente. Se  $N$  é um ponto da reta  $r$  distinto de  $M$ , prove que

$$\overline{AM} + \overline{MB} < \overline{AN} + \overline{NB}$$

#### Gabarito



#### Solução 1:

Note que  $\overline{AM} = \overline{A'M}$ , pois  $\overline{CM}$  é altura e mediana do triângulo  $AMA'$  e, portanto, ele é isósceles de base  $AA'$ . Analogamente, temos que  $\overline{AN} = \overline{A'N}$ .

Portanto, pela desigualdade triangular no triângulo  $A'BN$ :

$$\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{A'M} + \overline{MB} = \overline{A'B} < \overline{A'N} + \overline{BN} = \overline{AN} + \overline{BN}$$

como desejado.

#### Solução 2:

Considere a elipse com focos em  $A$  e  $B$  passando por  $M$ . Como as retas  $AM$  e  $BM$  formam o mesmo ângulo com a reta  $CM$ , pela propriedade refletora, temos que a reta  $CM$  é tangente à elipse.

Portanto, qualquer outro ponto  $N$  na reta é externo à elipse e então

$$\overline{AM} + \overline{MB} < \overline{AN} + \overline{BN}.$$

### Questão 8

Dada a equação abaixo onde o valor de  $\alpha$  é um número real

$$\frac{\alpha \cos(x)}{2 \cos(2x) - 1} = \frac{\alpha + \sin(x)}{(\cos^2(x) - 3 \sin^2(x)) \operatorname{tg}(x)}$$

Determine:

- os valores de  $\alpha$  para os quais a equação admite solução;
- as soluções, em radianos, da equação em função de  $\alpha$ .

### Gabarito

Usando que  $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$  e que  $\cos^2(x) - 3 \sin^2(x) = 4 \cos^2(x) - 3$ , temos:

$$\alpha \cdot \cos x = \frac{\alpha + \sin x}{\operatorname{tg} x}$$

Daí,

$$\alpha = \frac{\sin(x)}{\sin(x) - 1}$$

Agora precisamos limitar o  $\alpha$  baseado no seno e para isso temos que:

$$\sin(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Como  $-1 \leq \sin(x) \leq 1 \rightarrow \alpha \leq \frac{1}{2}$

Agora precisamos achar as restrições:

$$4 \cos^2 x - 3 \neq 0 \rightarrow \cos^2 x \neq \frac{3}{4} \rightarrow \sin^2 x \neq \frac{1}{4} \rightarrow \sin x \neq \frac{1}{2} \text{ e } \sin x \neq -\frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\alpha \neq -1 \text{ e } \alpha \neq 1/3$$

$$\operatorname{tg} x \neq 0 \rightarrow \sin x \neq 0 \rightarrow \alpha \neq 0$$

Para a tangente existir:  $\cos x \neq 0 \rightarrow \sin x \neq 1$  ou  $\sin x \neq -1 \rightarrow \alpha \neq \frac{1}{2}$

Assim a resposta é:  $\left\{ \alpha < \frac{1}{2} - \{0, 1/3, -1\} \right\}$

$$\text{b) } x = \arcsen\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right) + 2k\pi \cup \left(\pi - \arcsen\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)\right) + 2k\pi$$

### Questão 9

Os pontos  $A(1, 3)$ ,  $B(2, 6)$ ,  $C(7, 5)$  e  $D(7, 3)$  situam-se sobre lados distintos de um quadrado  $EFGH$ . Determine as coordenadas dos vértices desse quadrado.

**Gabarito**

Calculando uma reta passando por  $A$ :

$$y - 3 = m(x - 1) \Rightarrow r_A : mx - y - m + 3 = 0$$

Calculando uma reta passando por  $B$ , perpendicular a  $r_A$ :

$$y - 6 = -\frac{1}{m}(x - 2) \Rightarrow r_B : x + my - 6m - 2 = 0$$

Como é um quadrado, devemos ter

$$d(C, r_A) = d(D, r_B)$$

$$\Rightarrow \frac{|7m - 5 - m + 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|7 + 3m - 6m - 2|}{\sqrt{1^2 + m^2}}$$

$$\Rightarrow |6m - 2| = |-3m + 5|$$

Logo,  $6m - 2 = -3m + 5 \Rightarrow m = \frac{7}{9}$  ou  $6m - 2 = 3m - 5 \Rightarrow m = -1$ .

Para  $m = \frac{7}{9}$ , os pontos estariam nos prolongamentos dos lados e então  $m = -1$ .

Portanto, as retas são

$$r_A : x + y = 4$$

$$r_B : y - x = 4$$

Fazendo as retas genéricas por  $C$  e  $D$

$$y - 5 = m(x - 7) \Rightarrow r_C : x + y = 12$$

$$y - 3 = -\frac{1}{m}(x - 7) \Rightarrow r_D : y - x = -4$$

Intersectando as retas, obtemos os pontos

$$(0, 4), (4, 8), (8, 4), (4, 0)$$

**Questão 10**

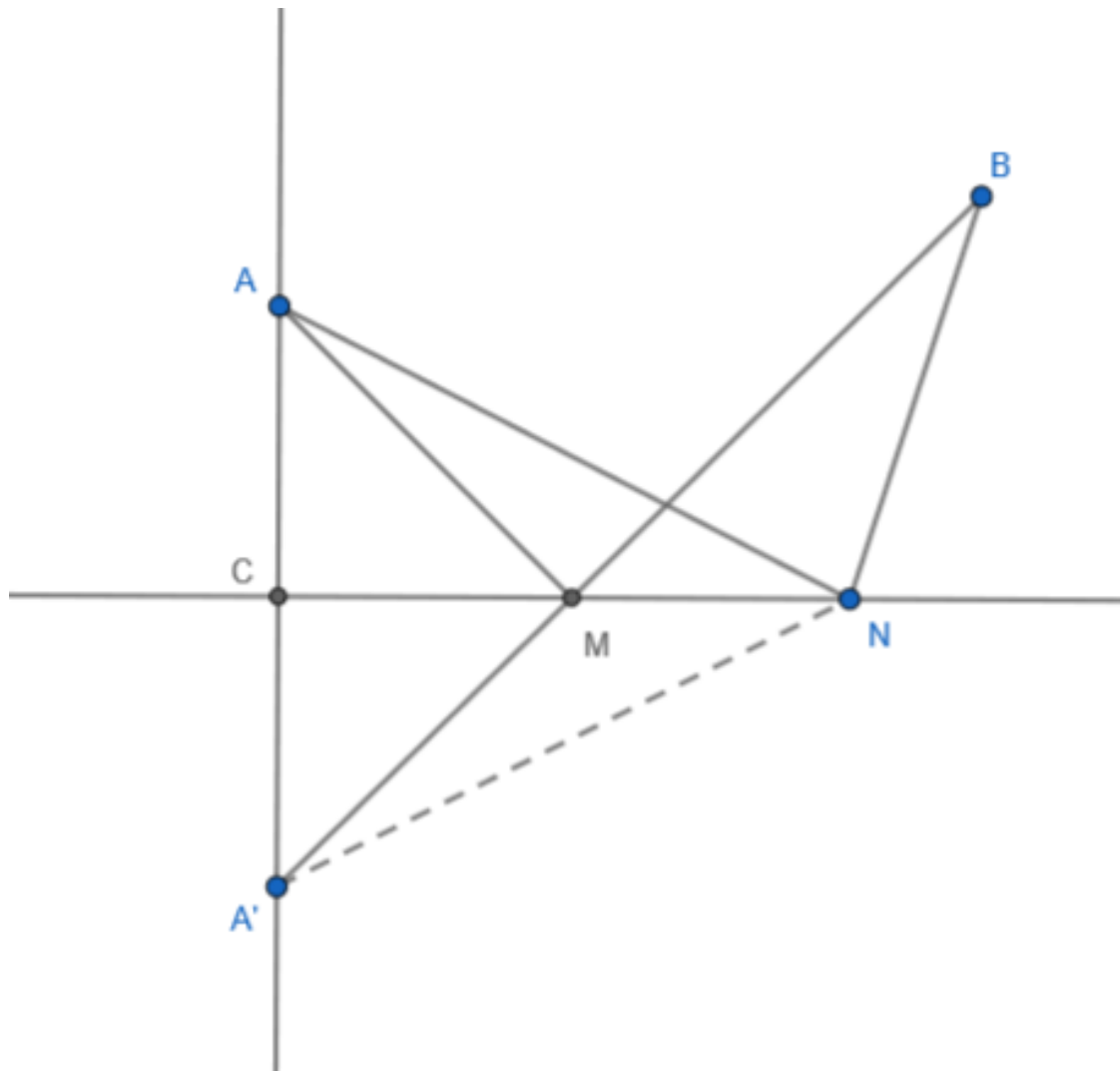
Considere uma pirâmide triangular regular reta de altura  $h$ . Uma esfera de raio  $r$  contém os ortocentros das faces laterais da pirâmide e o vértice do qual foi traçada a altura da pirâmide. Calcule o volume da pirâmide em função de  $r$  e  $h$ .

**Gabarito**

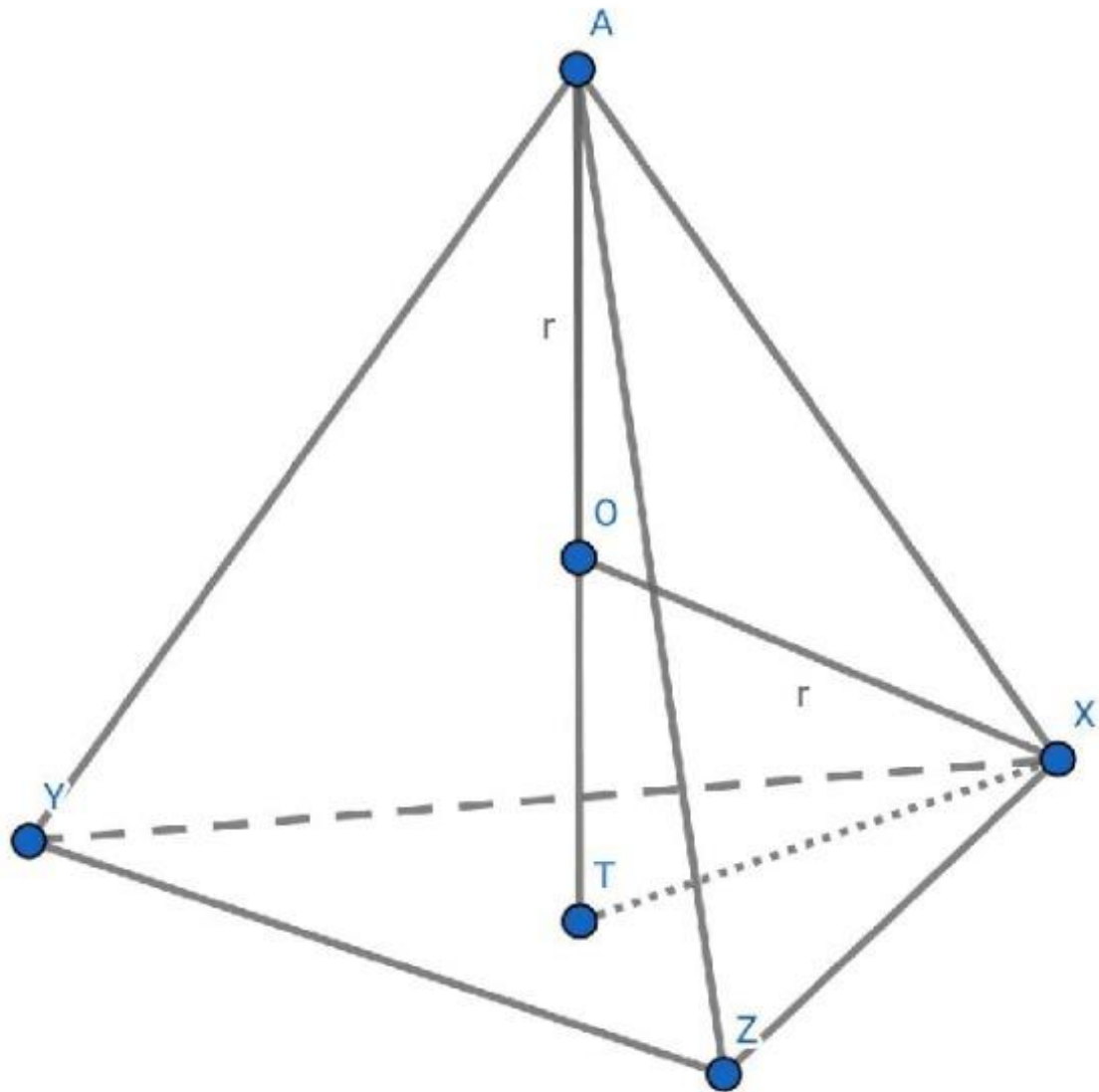
Seja  $2a$  a aresta da base.

$$AH = h \text{ e } HM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Seja  $O$  o centro da esfera dada. Por simetria,  $O \in \overline{AH}$ .

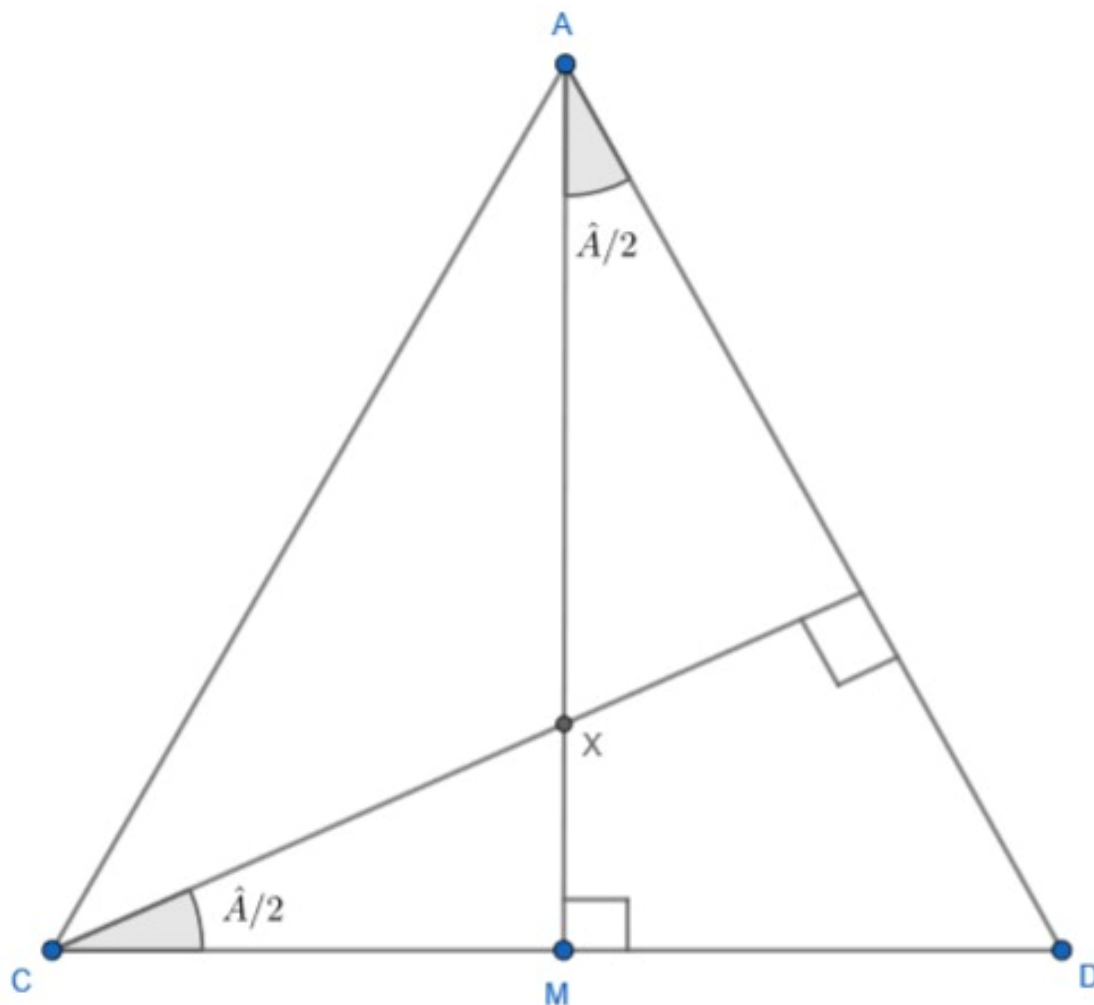


Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  os ortocentros das faces laterais  $ACD$ ,  $ABD$  e  $ABC$ , respectivamente, e  $H$  o pé da altura da pirâmide.  
Face  $ACD$ :



$$AM = g = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}} \text{ e } AX = AM - XM = g - a \cdot \frac{a}{g} = \frac{g^2 - a^2}{g}$$

Sendo  $TX \parallel HM$ , com  $T \in AH$ , veja que  $T$  é o centro da base da pirâmide triangular regular  $XYZ$ .



Pitágoras no triângulo OTX:

$$\overline{OT}^2 + \overline{TX}^2 = r^2 \rightarrow (\overline{AT} - r)^2 + \overline{TX}^2 = r^2 \rightarrow \overline{AT}^2 - 2 \cdot \overline{AT} \cdot r + r^2 + \overline{TX}^2 = r^2$$

$$\rightarrow 2 \cdot \overline{AT} \cdot r = \overline{AT}^2 + \overline{TX}^2 = \overline{AX}^2$$

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AX}}{2r}$$

Veja que o triângulo ATX é semelhante ao triângulo AHM

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AM}} \rightarrow \frac{\overline{AX}}{2r} = \frac{h}{g} \leftrightarrow \overline{AX} = \frac{2rh}{g}$$

$$\text{Mas } \overline{AX} = \frac{g^2 - a^2}{g} = \frac{2rh}{g} \leftrightarrow a^2 = g^2 - 2rh = h^2 + \frac{a^2}{3} - 2rh \leftrightarrow \frac{2a^2}{3} = h^2 - 2rh$$

$$a^2 = \frac{3h(h - 2r)}{2}$$

Logo,

$$\text{volume}(ABCD) = \frac{1}{3} \cdot (2a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{a^2 \sqrt{3} h}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{3} h^2 (h - 2r)}{2}}$$