

GABARITO MATEMÁTICA

Questão 1

A , B e C são conjuntos não vazios de inteiros positivos e $|X|$ representa a cardinalidade de um conjunto X . Sabe-se que:

- $|A| = |B| = |C|$
- $|A \cap \overline{(B \cup C)}| = |\overline{A} \cap B \cap C|$
- $|A \cap B| < |A \cap C| < |B \cap C|$

O menor valor possível para a soma dos elementos de $A \cup B \cup C$ é:

- A** () 21 **B** () 36 **C** () 45 **D** () 55 **E** () 78

Gabarito: A

Temos que $\overline{(B \cup C)} = \overline{B} \cap \overline{C}$. Logo:

$$|A \cap \overline{(B \cup C)}| = |A \cap \overline{B} \cap \overline{C}| \Rightarrow |A \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\overline{A} \cap B \cap C|.$$

Isso nos diz que as duas regiões $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ e $\overline{A} \cap B \cap C$ do diagrama de Venn possuem a mesma área.

Logo, usando que $|A| = |B| = |C|$ e a igualdade acima, temos que vale o mesmo para os outros dois pares de regiões e, chamando de a , b e c as áreas exclusivas de A , B e C , e de x a área da interseção tripla, temos que as interseções duas a duas valem $a + x$, $b + x$ e $c + x$ (em alguma ordem).

Por inclusão-exclusão, temos que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$\Rightarrow |A \cup B \cup C| = 3(a + b + c + x) - (a + x) - (b + x) - (c + x) + x = 2a + 2b + 2c + x$$

$$\Rightarrow |A \cup B \cup C| = 2a + 2b + 2c + x \geq 2a + 2(a + 1) + 2(a + 2) + x = 6a + 6 + x$$

$$\Rightarrow |A \cup B \cup C| \geq 6 \cdot 0 + 6 + 0 \geq 6.$$

Logo, a soma é pelo menos $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

Um exemplo em que a igualdade ocorre é $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 4, 6\}$ e $C = \{3, 4, 5\}$.

Questão 2

O número de soluções inteiras da inequação

$$\frac{(x+1)(x^9-1)(x^2-x+1)(x^2-10x+21)}{(x^6-1)(x^6+x^3+1)} < 0$$

é:

- A** () 3 **B** () 4 **C** () 5 **D** () 6 **E** () 7

**Gabarito: A**

Temos que

$$x^9 - 1 = (x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1)$$

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x^3 - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Portanto:

$$\frac{(x+1)(x^9-1)(x^2-x+1)(x^2-10x+21)}{(x^6-1)(x^6+x^3+1)} = \frac{(x+1)(x^3-1)(x^6+x^3+1)(x^2-x+1)(x^2-10x+21)}{(x^3-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^6+x^3+1)}$$

$$x^2 - 10x + 21 = (x-5)^2 - 4$$

Logo, queremos os valores inteiros de x tais que

$$(x-5)^2 - 4 < 0 \Rightarrow (x-5)^2 < 4$$

$$\Rightarrow |x-5| < 2 \Rightarrow -2 < x-5 < 2$$

$$\Rightarrow 3 < x < 7 \Rightarrow x \in \{4, 5, 6\}.$$

Verificando, vemos que todos esses valores satisfazem a inequação inicial e então temos 3 valores inteiros de x que satisfazem a inequação inicial.

Questão 3

Seja i tal que $i^2 = -1$. O valor do número real a que satisfaz à equação

$$\operatorname{cis}(7\pi/6) - 2 \operatorname{cis}(-7\pi/6) = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & -i & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3} & a \\ i^5 & \sqrt{3} & -i/2 \end{vmatrix}$$

é:

A () 3

B () $\sqrt{3}/2$

C () $\sqrt{3}/4$

D () $\sqrt{3}/8$

E () $\sqrt{3}/16$

Gabarito: E

Calculando o determinante, temos

$$\begin{vmatrix} -\sqrt{3} & -i & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3} & a \\ i^5 & \sqrt{3} & -i/2 \end{vmatrix} = -\frac{3i}{2} - i^6 a - \frac{i^2 \sqrt{3}}{4} + 3a = -\frac{3}{2}i + 4a + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Simplificando agora o lado esquerdo, temos que

$$\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right] - 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i.$$

Portanto:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i = -\frac{3}{2}i + 4a + \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{16}.$$



Questão 4

Seja o polinômio $g(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + bx^2 + bx - 2b$. O valor do maior inteiro k para o qual $g(x)$ é divisível por $(x+2)^k$ para algum b inteiro é:

A () 1

B () 2

C () 3

D () 4

E () 5

Gabarito: B

Veja que

$$g(x) = (x+2)(x^4 - x^3 + bx - b)$$

$$= (x+2)(x-1)(x^3 + b)$$

Logo, já temos pelo menos um fator $x+2$.Para que haja outro fator, devemos ter $x+2$ dividindo $x^3 + b$:

$$x+2 \mid x^3 + b$$

$$\Rightarrow x+2 \mid x^3 + 2^3 + (b-8)$$

$$x+2 \mid b-8$$

Devemos então ter $b=8$ e conseguimos mais um fator $x+2$:

$$g(x) = (x+2)^2(x-1)(x^2 - 2x + 4)$$

Portanto, o maior valor inteiro de k é 2.

Questão 5

Considere a função real

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & \text{se } x < 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \\ \frac{x^4 - x^3}{x-1}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

O maior valor de a real para o qual $0 < |x-1| < a \Rightarrow |f(x)-1| < 1$ é:A () $\sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}$ B () $\frac{1}{2}$ C () $\sqrt[3]{2}$ D () $-1 + \sqrt[3]{2}$

E () 1

Gabarito: D

$$|f(x)-1| < 1$$

Note que nos intervalos dados, $f(x)-1 > 0 \rightarrow |f(x)-1| = f(x)-1$ Daí, $f(x) < 2$ Com isso, $x^3 < 2 \rightarrow 1 < x < \sqrt[3]{2}$

$$E -2x + 3 < 2 \rightarrow -2x < -1 \rightarrow x > \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < x < 1$$

O maior alfa que está contido no intervalo é: $\sqrt[3]{2} - 1$

Questão 6

Considere a função real

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & \text{se } x < 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \\ \frac{x^4 - x^3}{x - 1}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

O maior valor de a real para o qual $0 < |x - 1| < a \Rightarrow |f(x) - 1| < 1$ é:

A () $\sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}$

B () $\frac{1}{2}$

C () $\sqrt[3]{2}$

D () $-1 + \sqrt[3]{2}$

E () 1

Gabarito: D

$$|f(x) - 1| < 1$$

Note que nos intervalos dados, $f(x) - 1 > 0 \rightarrow |f(x) - 1| = f(x) - 1$

Daí, $f(x) < 2$

Com isso, $x^3 < 2 \rightarrow 1 < x < \sqrt[3]{2}$

$$E -2x + 3 < 2 \rightarrow -2x < -1 \rightarrow x > \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < x < 1$$

O maior alfa que está contido no intervalo é: $\sqrt[3]{2} - 1$

Questão 7

Seja uma matriz com 100 linhas e 100 colunas. O elemento da linha i e coluna j é denotado por a_{ij} . Os elementos da matriz formam uma progressão aritmética (PA) de razão 5. O primeiro termo da progressão é o elemento $a_{1,1}$ e tem seu valor igual a 10. Para formar essa PA, percorrem-se os elementos de uma mesma linha e, concluída uma linha, passa-se para a próxima. Se n é o traço da matriz, a soma dos algarismos de n é:

A () 10

B () 19

C () 23

D () 28

E () 32

Gabarito: B

Temos que o termo a_{ij} é o termo $100(i - 1) + j$ da PA de razão 5 e termo inicial igual a 10, pois das linhas 1 a $i - 1$ temos 100 termos da PA em cada uma delas e na linha i temos j termos.

Portanto:

$$a_{ij} = 10 + 5[100(i - 1) + j - 1] = 500i + 5j - 495$$

$$\Rightarrow a_{i,i} = 500i + 5i - 495 = 505i - 495 = 10 + 505(i - 1)$$

Temos então que o traço é dado por

$$a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{100,100} = \frac{(10 + 10 + 505 \cdot 99)}{2} \cdot 100 = 2500750.$$

Logo, o valor de n é $2 + 5 + 0 + 0 + 7 + 5 + 0 = 19$.

O enunciado não deixa claro se pula para o 1º elemento da 2ª linha ou para o último elemento da 2ª linha. Porém, no 2º caso não há resposta.



Questão 8

O intervalo que contém os valores de x tais que

$$0,09^{(4+x)} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{0,3}} \right)^{x^2} \right]^2 < x^2 - (x+1)(x-1)$$

é:

A () $(-\infty, 4) \cup (8, \infty)$

B () $(-2, 4)$

C () $(4, 8)$

D () $(-\infty, \infty)$

E () $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$

Gabarito: B

Desenvolvendo: $(0,3)^{2 \cdot (4+x)} \cdot \left(\frac{1}{0,3} \right)^{x^2} < 1 \rightarrow (0,3)^{-x^2+8+2x} < 1 = (0,3)^0 \rightarrow$

$$-x^2 + 2x + 8 > 0, \text{ pois a base é menor que } 1.$$

Dessa forma, $-2 < x < 4$

A pergunta pede um intervalo que contém as soluções, e assim as letras A, B e D estariam corretas.

Questão 9

Seja i tal que $i^2 = -1$. Seja A dado pela equação:

$$A = \sum_{n=1}^{1000} \left[(i)^{2n-2} \ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{(-1)^{n-1}} \right]$$

O valor de e^{-A} é:

A () 250

B () 500

C () 501

D () 1000

E () 1001

Gabarito: C

Temos que

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=1}^{1000} (i)^{2n-2} \ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{(-1)^{n-1}} = \sum_{n=1}^{1000} (i^2)^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{1000} (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right) = \sum_{n=1}^{1000} \ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{1000} (\ln(n+1) - \ln(n+2)) = \ln 2 - \ln 1002 = \ln \left(\frac{2}{1002} \right). \end{aligned}$$

Portanto:

$$e^{-A} = e^{-\ln \left(\frac{2}{1002} \right)} = \frac{1002}{2} = 501.$$

**Questão 10**

Sejam dois dados cúbicos (com faces numeradas de 1 a 6) e um dado na forma de dodecaedro (com faces numeradas de 1 a 12). Em cada tipo de dado, todas as faces possuem mesma probabilidade de ocorrência. Com um único lançamento de cada dado, a probabilidade de se obter maior pontuação com o dodecaedro do que com os dois dados cúbicos somados é:

A () $2/3$ **B ()** $1/6$ **C ()** $7/36$ **D ()** $5/12$ **E ()** $3/16$ **Gabarito: D**

Abrindo a probabilidade de cada soma em casos:

$$\text{Soma dos cubos} = 2 \text{ e dodecaedro de } 3 \text{ a } 12: \frac{10}{12} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{12 \cdot 6^2}$$

$$\text{Soma dos cubos} = 3 \text{ e dodecaedro de } 4 \text{ a } 12: \frac{9}{12} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{12 \cdot 6^2}$$

$$\text{Soma dos cubos} = 4 \text{ e dodecaedro de } 5 \text{ a } 12: \frac{8}{12} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{24}{12 \cdot 6^2}$$

$$\text{Soma dos cubos} = 5 \text{ e dodecaedro de } 6 \text{ a } 12: \frac{7}{12} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{28}{12 \cdot 6^2}$$

$$\text{Soma dos cubos} = 6 \text{ e dodecaedro de } 7 \text{ a } 12: \frac{6}{12} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{30}{12 \cdot 6^2}$$

$$\text{Soma dos cubos} = 7 \text{ e dodecaedro de } 8 \text{ a } 12: \frac{5}{12} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{30}{12 \cdot 6^2}$$

$$\text{Soma dos cubos} = 8 \text{ e dodecaedro de } 9 \text{ a } 12: \frac{4}{12} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{20}{12 \cdot 6^2}$$

$$\text{Soma dos cubos} = 9 \text{ e dodecaedro de } 10 \text{ a } 12: \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{12}{12 \cdot 6^2}$$

$$\text{Soma dos cubos} = 10 \text{ e dodecaedro de } 11 \text{ a } 12: \frac{2}{12} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{6}{12 \cdot 6^2}$$

$$\text{Soma dos cubos} = 11 \text{ e dodecaedro} = 12: \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{12 \cdot 6^2}$$

$$\text{Somando os casos: } \frac{180}{12 \cdot 6^2} = \frac{5}{12}$$

Questão 11

O valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\arctg\left(\frac{1}{3}\right) + \arctg\left(\frac{1}{4}\right) + \arctg\left(\frac{1}{5}\right) + \arctg\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{4}$$

é:

A () 10**B ()** 6**C ()** 7**D ()** 47**E ()** 52**Gabarito: D**

$$\text{Seja } \arctg\left(\frac{1}{3}\right) = \alpha, \arctg\left(\frac{1}{4}\right) = \beta, \arctg\left(\frac{1}{5}\right) = \gamma, \arctg\left(\frac{1}{n}\right) = \theta$$

$$\text{Temos que } \alpha + \beta + \gamma + \theta = \frac{\pi}{4}$$

Aplicando tangente:

$$\text{tg}(\alpha + \beta + \gamma + \theta) = 1 \rightarrow \frac{\text{tg}(\alpha + \beta) + \text{tg}(\gamma + \theta)}{1 - \text{tg}(\alpha + \beta) \cdot \text{tg}(\gamma + \theta)} = 1$$

Calculando separadamente:

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{11}{12}} = \frac{7}{11}$$



$$\operatorname{tg}(\gamma + \theta) = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{5n}} = \frac{n+5}{5n-1}$$

Substituindo:

$$\frac{7}{11} + \frac{n+5}{5n-1} = 1 - \frac{7(n+5)}{11(5n-1)}$$

Resolvendo:

$$35n - 7 + 11n + 55 = 55n - 11 - 7n - 35 \Rightarrow 2n = 94 \Rightarrow n = 47$$

Questão 12

Considere duas circunferências no plano cartesiano Oxy , uma de raio igual a 6 e centro no ponto $(6, 6)$ e outra de centro na origem e tangente exteriormente à primeira. A equação da tangente interior comum às circunferências é:

A () $y + 2x - 3(\sqrt{2} - 2) = 0$

B () $2y + x + 6(\sqrt{2} - 2) = 0$

C () $y + x + 6(\sqrt{2} - 2) = 0$

D () $y + x - 6(\sqrt{2} - 2) = 0$

E () $2y + x - 6(\sqrt{2} - 2) = 0$

Gabarito: C

Seja r o raio da circunferência centrada na origem e $R = 6$.

$$(r + R) \cdot \cos 45^\circ = 6$$

$$r = 6(\sqrt{2} - 1)$$

Então a tangente interior é:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m = -1 \text{ e } x_0 = y_0 = r \cdot \cos 45^\circ = 3(2 - \sqrt{2})$$

$$y + x + 6(\sqrt{2} - 2) = 0$$

Questão 13

Considere uma barra AB de comprimento L fixada na posição vertical sobre um muro de altura $L/2$, que está assentado sobre um plano horizontal. Desprezando a altura do observador O , o ângulo máximo $\widehat{AOB}$ enquanto o observador O caminha sobre o plano horizontal é:

A () 30°

B () 60°

C () 75°

D () 15°

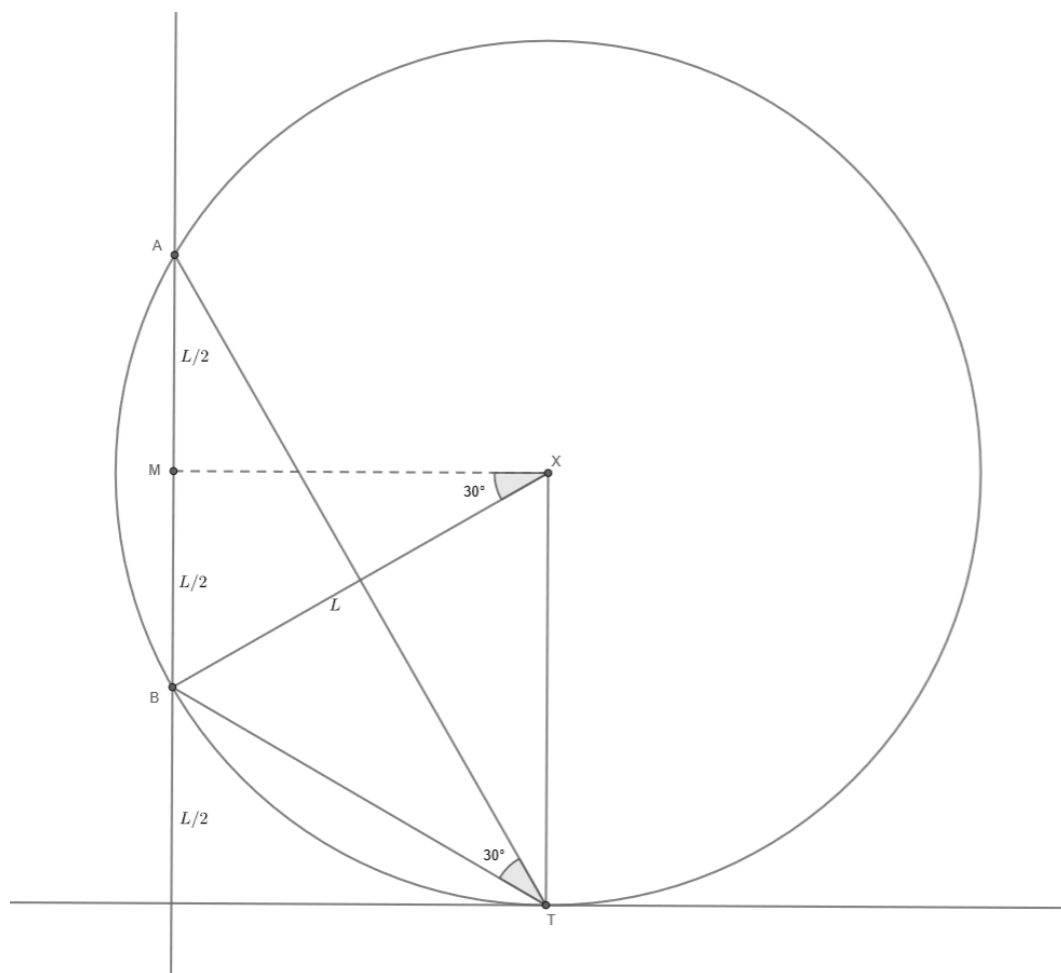
E () 45°

Gabarito: A

Etapa 1. Etapa

Solução 1:

Considere o arco capaz que passa por A e B e é tangente ao solo num ponto T .



Note que, à exceção do ponto de tangência, todo ponto O' no solo é externo ao arco capaz e, portanto, satisfaz $\angle AO'B < \angle ATB$. Então, o máximo ocorre no ponto de tangência.

Seja X o centro do círculo e M a projeção de X em AB . Sabemos que M é ponto médio de AB . Logo, $MB = L/2$. Dessa forma, o raio mede $MB + \frac{L}{2} = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} = L$.

Além disso, por ângulo inscrito, temos que

$$\angle ATB = \frac{\angle AXB}{2} = \angle MXB.$$

Finalmente, olhando para o triângulo MBX , temos que

$$\text{sen } \angle ATB = \text{sen } \angle MXB = \frac{L/2}{l} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ATB = 30^\circ.$$

Etapa 2. Etapa

Solução 2:

Seja P o ponto em que o muro se encontra no solo. Sendo $\alpha = \angle AOP$, $\theta = \angle BOP$ e $PO = x$.

$$k = \tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan \alpha - \tan \theta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \theta} = \frac{\frac{3L/2}{x} - \frac{L/2}{x}}{1 + \frac{3L/2}{x} \cdot \frac{L/2}{x}} = \frac{\frac{L}{x}}{1 + \frac{3L^2}{4x^2}} = \frac{4xL}{4x^2 + 3L^2}.$$

Temos então que

$$\frac{4xL}{4x^2 + 3L^2} = k \Leftrightarrow 4kx^2 - 4Lx + 3kL^2 = 0.$$

Devemos ter $\Delta \geq 0$. Logo:

$$(-4L)^2 - 4 \cdot 4k \cdot 3kL^2 \geq 0 \Rightarrow 16L^2 - 48k^2L^2 \geq 0 \Rightarrow k^2 \leq \frac{1}{3} \Rightarrow |k| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Como $0^\circ < \alpha - \theta < 90^\circ$, temos $k > 0$ e o ângulo é máximo quando k é máximo. Logo,

$$k = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan(a - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a - \theta = 30^\circ.$$

Questão 14

Sejam α e β dois planos não paralelos que se interceptam na reta r e cujo ângulo diedro é $\pi/6$ radianos. Tome pontos A, B, C, D de α e, por cada um destes pontos, trace retas ortogonais a α que interceptam β nos pontos A', B', C', D' , respectivamente. Sabendo que o quadrilátero $ABCD$ é um trapézio cuja diagonal AC é paralela a r , a razão entre as áreas de $ABCD$ e $A'B'C'D'$ é:

A () 1

B () $3/2$

C () $\sqrt{3}/2$

D () $\sqrt{3}/3$

E () $1/3$

Gabarito: C

Pelo teorema de projeção de áreas: $\frac{S'}{S} = \cos \theta$

$$\text{Então: } \frac{S'}{S} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Questão 15

Em uma escada, uma bola lançada do i -ésimo degrau irá parar em qualquer degrau mais baixo com probabilidade $1/i$. Por exemplo, ao lançarmos uma bola do 3º degrau, a bola tem $1/3$ de chances de parar no 2º degrau, $1/3$ de chances de parar no 1º degrau e $1/3$ de chances de parar no degrau 0. Nessa escada lançamos uma bola preta do degrau m , $m > 0$, e uma bola branca do degrau n , $n > m$. A probabilidade de a bola branca parar em um degrau mais baixo do que a bola preta é:

A () $\frac{m^2 - 2m + 1}{2n}$

B () $\frac{m^2 - 1}{2n}$

C () $\frac{m}{2n}$

D () $\frac{m^2}{2n}$

E () $\frac{m - 1}{2n}$

Gabarito: E

Se a branca parar em qualquer posição k , a bola m deve parar numa posição entre $k + 1$ e $m - 1$.

Como a probabilidade de uma bola parar numa posição i qualquer é $\frac{1}{n}$ para as brancas e $\frac{1}{m}$ para as pretas, segue que o pedido é uma soma de progressão aritmética:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} \cdot [m - 1 + m - 2 + \dots + 1] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} \cdot (m - 1) \cdot \frac{m}{2} = \frac{m - 1}{2n}$$

**GABARITO FÍSICA****Questão 16**

Um projétil de chumbo está a uma temperatura de 175°C quando atinge uma parede e nela se aloja. Considere que 25% da energia cinética do projétil imediatamente antes da colisão permaneça nele como energia interna.

Dados:

- calor específico do chumbo: $125 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C})$;
- temperatura de fusão do chumbo: 327°C ;
- calor latente de fusão do chumbo: $26\,000 \text{ J/kg}$.

Se a energia interna que permanece após o projétil atingir a parede é justamente a mínima para que ocorra a fusão total do chumbo, a velocidade do projétil imediatamente antes da colisão, em m/s, é:

A () 30

B () 150

C () 400

D () 450

E () 600

Gabarito: E

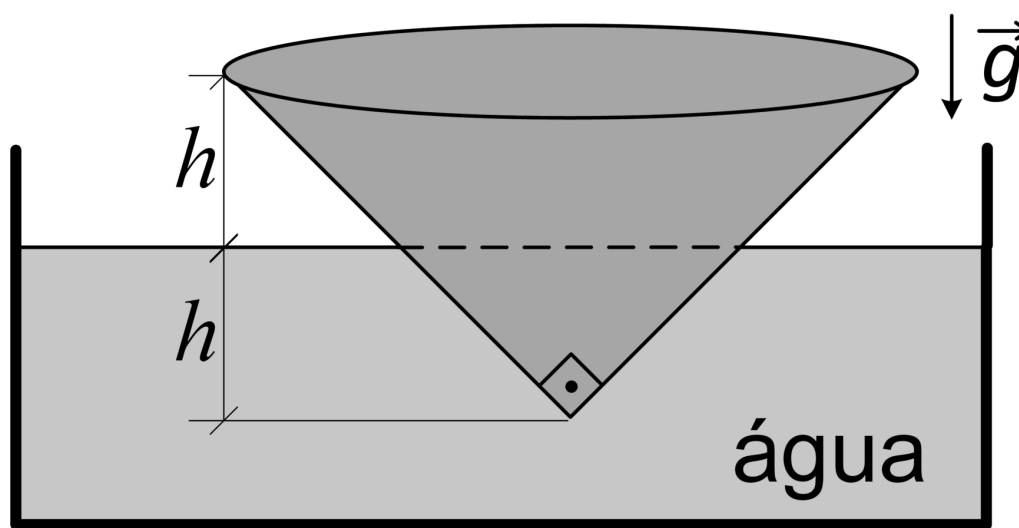
Sabemos que 25% da energia cinética é usada para elevar a temperatura do chumbo até o ponto de fusão e derretê-lo por inteiro:

$$0,25 \cdot \frac{mv^2}{2} = mc\Delta T + mL$$

$$\frac{0,25v^2}{2} = 125 \cdot (327 - 175) + 26000$$

$$v = 600 \text{ m/s}$$

Questão 17



Um recipiente vazio de formato cônico está parcialmente imerso na água e em equilíbrio, como geometria apresentada na figura. Insere-se no interior do recipiente uma partícula de massa $m = K\rho\pi h^3$, onde K é uma constante, ρ é a massa específica da água e h está indicado na figura. Após essa inserção, o recipiente sofre um pequeno deslocamento, afundando uma altura Δh .

Dado:

- aceleração da gravidade: g .

Observações:

- a espessura do recipiente é muito pequena;
- $\Delta h \ll h$;
- para $|a| \ll 1$, $(1 + a)^n \approx 1 + na$.

A altura Δh que o recipiente irá afundar até o novo ponto de equilíbrio é:

A () $Kh/3$

B () $Kh/6$

C () Kh

D () $3Kh$

E () $2Kh$

Gabarito: C

O cone submerso tem altura total $2h$ (metade acima da linha d'água, metade abaixo) e semiângulo de abertura de 45° , de modo que:

$$V_{total} = A_{base} \cdot \frac{2h}{3} = \frac{8\pi h^3}{3}$$

Tendo o volume submerso, podemos escrever o equilíbrio no início:

$$E = P \Rightarrow \rho V_{submerso} g = mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \cdot \frac{\pi h^3}{3} = m \quad (i)$$

No final, temos que o novo empuxo será igual ao novo peso, sendo a altura submersa no final igual a $h + \Delta h$, podemos escrever o volume submerso no final:

$$V_{submerso_{final}} = V_{total} \left(\frac{h + \Delta h}{2h} \right)^3 = \frac{8\pi h^3}{3} \left(\frac{1 + \frac{\Delta h}{h}}{2} \right)^3$$

Usando que o novo empuxo é igual ao novo peso:

$$\rho V_{\text{submerso final}} g = (m + m')g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \cdot \frac{8\pi h^3}{3} \left(\frac{1 + \frac{\Delta h}{h}}{2} \right)^3 = m + K\rho\pi h^3$$

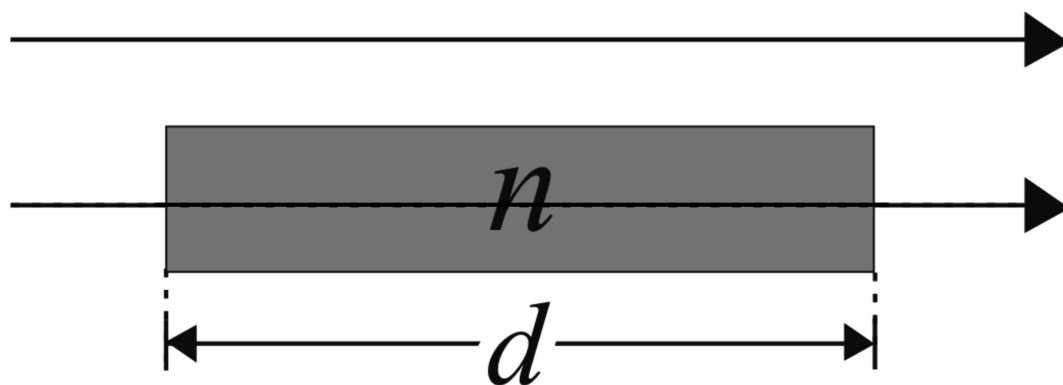
Substituindo a equação (i) na equação acima:

$$\rho \cdot \frac{8\pi h^3}{3} \left(\frac{1 + \frac{\Delta h}{h}}{2} \right)^3 = \rho \cdot \frac{\pi h^3}{3} + K\rho\pi h^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\Delta h}{h} \right)^3 = \frac{1}{3} + K \Rightarrow 1 + \frac{3\Delta h}{h} = 1 + 3K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta h = Kh$$

Questão 18



A figura mostra dois raios paralelos de luz que viajam em fase no vácuo até que um deles encontra uma película.

Dados:

- espessura da película: d ;
- índice de refração da película: n ;
- frequência dos raios de luz: f ;
- velocidade da luz no vácuo: c .

Observação:

- a medida de diferença de fase entre os raios tem como referência um plano ortogonal a eles.

A condição necessária e suficiente para que os raios continuem viajando em fase após o raio de baixo deixar a película é:

A () $\frac{(n^2 - 1)df}{c}$ deve ser um número inteiro ímpar

B () $\frac{(n^2 - 1)df}{c}$ deve ser um número inteiro par

C () $\frac{(n - 1)df}{c}$ deve ser um número inteiro

D () $\frac{2(n - 1)df}{c}$ deve ser um número inteiro ímpar

E () $\frac{2(n + 1)df}{c}$ deve ser um número inteiro par

Gabarito: C

Temos que a diferença de caminhos se deve ao raio de luz de cima percorrer uma distância d no ar, e o raio de luz de baixo percorrer uma distância d na película.

Para que as ondas estejam em fase após percorrerem os caminhos, elas devem sofrer interferência construtiva, portanto:

$$\Delta S = \frac{k\lambda}{2}, \text{ com } k \text{ par}$$

Ou, ainda:

$$\Delta S = m\lambda, \text{ com } m \text{ inteiro}$$

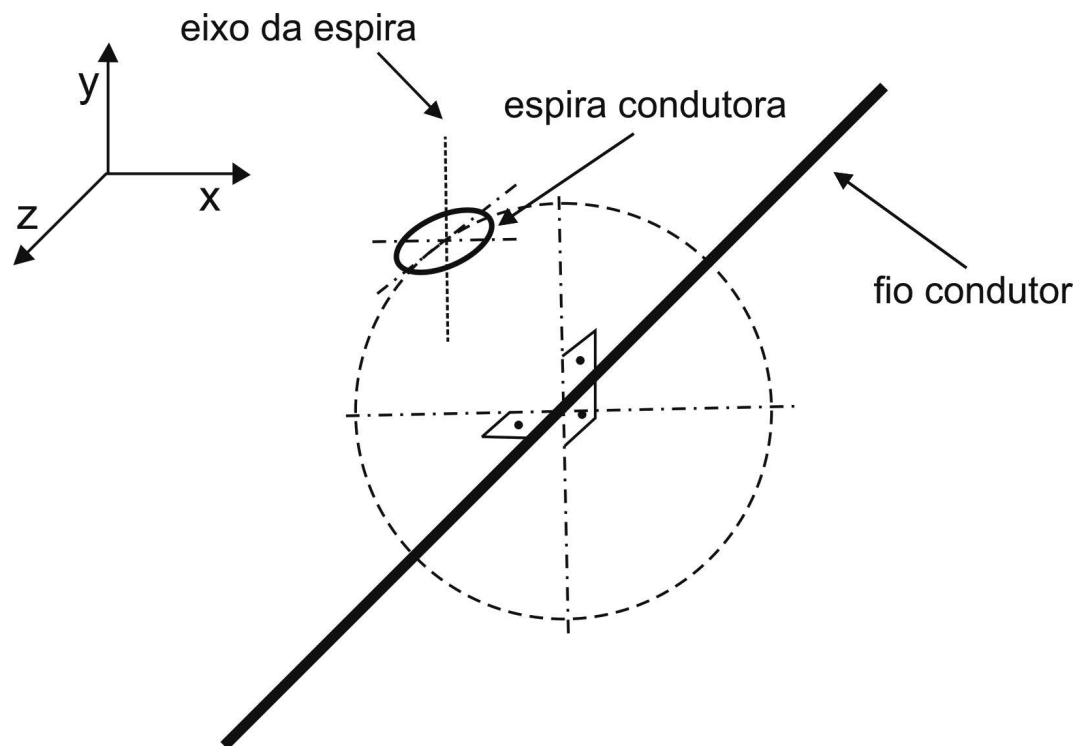
Podemos escrever a diferença de caminhos usando que o raio de cima percorre a distância d enquanto o raio de baixo percorre a distância nd , usando a ideia de percurso óptico:

$$\Delta S = nd - d = d(n - 1)$$

Usando que a interferência deve ser construtiva:

$$\begin{aligned} d(n - 1) &= m\lambda = \frac{mc}{f} \Rightarrow \\ \Rightarrow m &= \frac{df(n - 1)}{c} \end{aligned}$$

Questão 19



O sistema da figura é montado com o objetivo de determinar a resistência elétrica de uma espira condutora de área A . O centro dessa espira descreve uma trajetória circular de raio R e período t , à velocidade angular constante, ao redor de um fio também condutor com uma corrente elétrica contínua I . A corrente elétrica na espira é medida e seu valor oscila harmonicamente entre $+i$ e $-i$.

Dados:

- área da espira: $A = 1 \text{ cm}^2$;
- raio da trajetória do centro da espira: $R = 10 \text{ cm}$;
- período da trajetória circular do centro da espira: $t = 2 \text{ s}$;
- corrente elétrica contínua do fio condutor: $I = 50 \text{ A}$;
- amplitude da corrente elétrica induzida medida na espira: $i = 1 \text{ mA}$;
- permeabilidade magnética no vácuo: $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T.m/A}$.

Observações:

- o sistema segue a orientação dos eixos xyz desenhados na figura;
- o fio condutor é paralelo ao eixo z ;
- o eixo da espira está sempre paralelo ao eixo y ;
- o plano da espira é sempre paralelo ao plano xz ;
- o plano da trajetória do centro da espira é paralelo ao plano xy ;
- considere que as linhas de campo magnético que atravessam a espira estejam paralelas;
- para toda frequência f , considere $\frac{\Delta \sin(2\pi ft)}{\Delta t} = 2\pi f \cos(2\pi ft)$.

A resistência da espira, em $\mu\Omega$, é:

A () 20π

B () $2,5\pi$

C () 4π

D () 5π

E () 10π

Gabarito: E

Definindo como θ o ângulo entre a vertical e a direção que liga o centro do movimento circular à espira, tem-se que o fluxo magnético pela espira em um instante t qualquer é dado por:

$$\phi = BA \sin \theta$$

Dessa forma, o módulo da força eletromotriz induzida na espira é:

$$|\varepsilon_{ind}| = \left| \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \right| = BA \left| \frac{\Delta(\sin \theta)}{\Delta t} \right| = BA \left| \frac{\Delta(\sin(2\pi f t))}{\Delta t} \right|$$

$$|\varepsilon_{ind}| = BA \cdot 2\pi f \cos(2\pi f t)$$

Sendo um circuito simples na espira, tem-se que:

$$|\varepsilon_{ind}| = ri$$

$$BA \cdot 2\pi f \cos(2\pi f t) = ri$$

Assim, sabendo que a amplitude da corrente induzida é dada por 1 mA, tem-se que:

$$BA \cdot 2\pi f = ri_{mx}$$

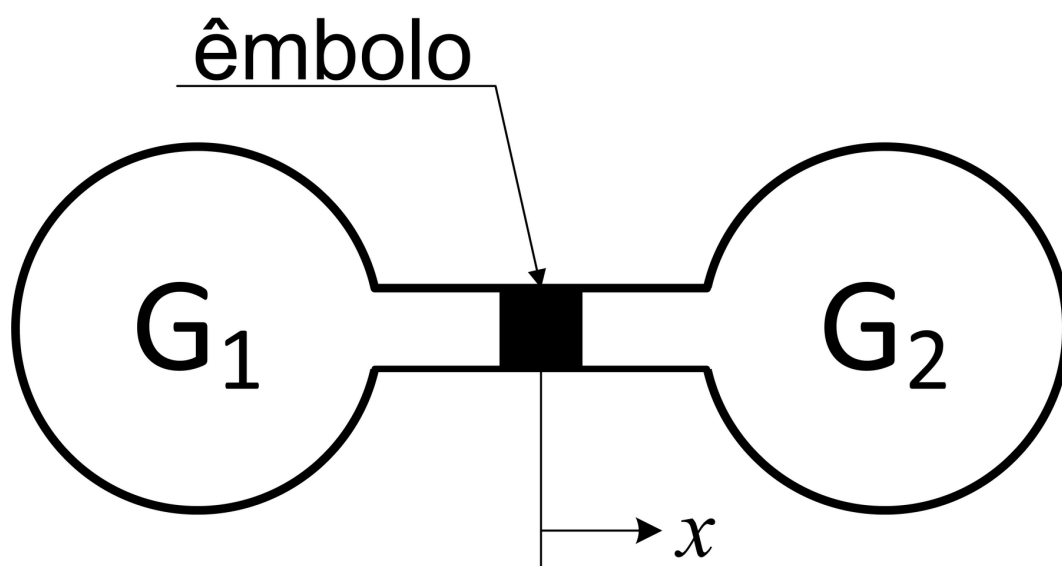
Como o campo a uma distância R do fio é dado por $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ e a frequência é dada por $f = \frac{1}{T}$, a expressão final fica:

$$r = \frac{\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot A \cdot \frac{2\pi}{T}}{i_{mx}}$$

Substituindo os valores do enunciado:

$$r = 10\pi \mu\Omega$$

Questão 20



Dois gases perfeitos, G_1 e G_2 , estão contidos em recipientes rígidos, separados por um êmbolo que se move sem atrito por um tubo longo de área de seção transversal S , conforme a figura. Cada um dos gases possui volume inicial V , a uma temperatura de 27°C . Considere a seguinte transformação isobárica do conjunto: a temperatura de G_1 aumenta 100°C e a de G_2 diminui 100°C . A expressão que representa o deslocamento x do êmbolo até o novo ponto de equilíbrio é:

A () $2V/(3S)$

B () $3V/(2S)$

C () $V/(2S)$

D () $V/(3S)$

E () $V/(6S)$

Gabarito: D

Como a temperatura do gás 1 aumentou e a do gás 2 diminuiu, sabemos que o volume do gás 1 aumentou e o volume do gás 2 diminuiu (já que a transformação é isobárica). Portanto, o êmbolo se deslocou x para a direita:

$$\Delta V_1 = Sx \text{ e } \Delta V_2 = -Sx$$

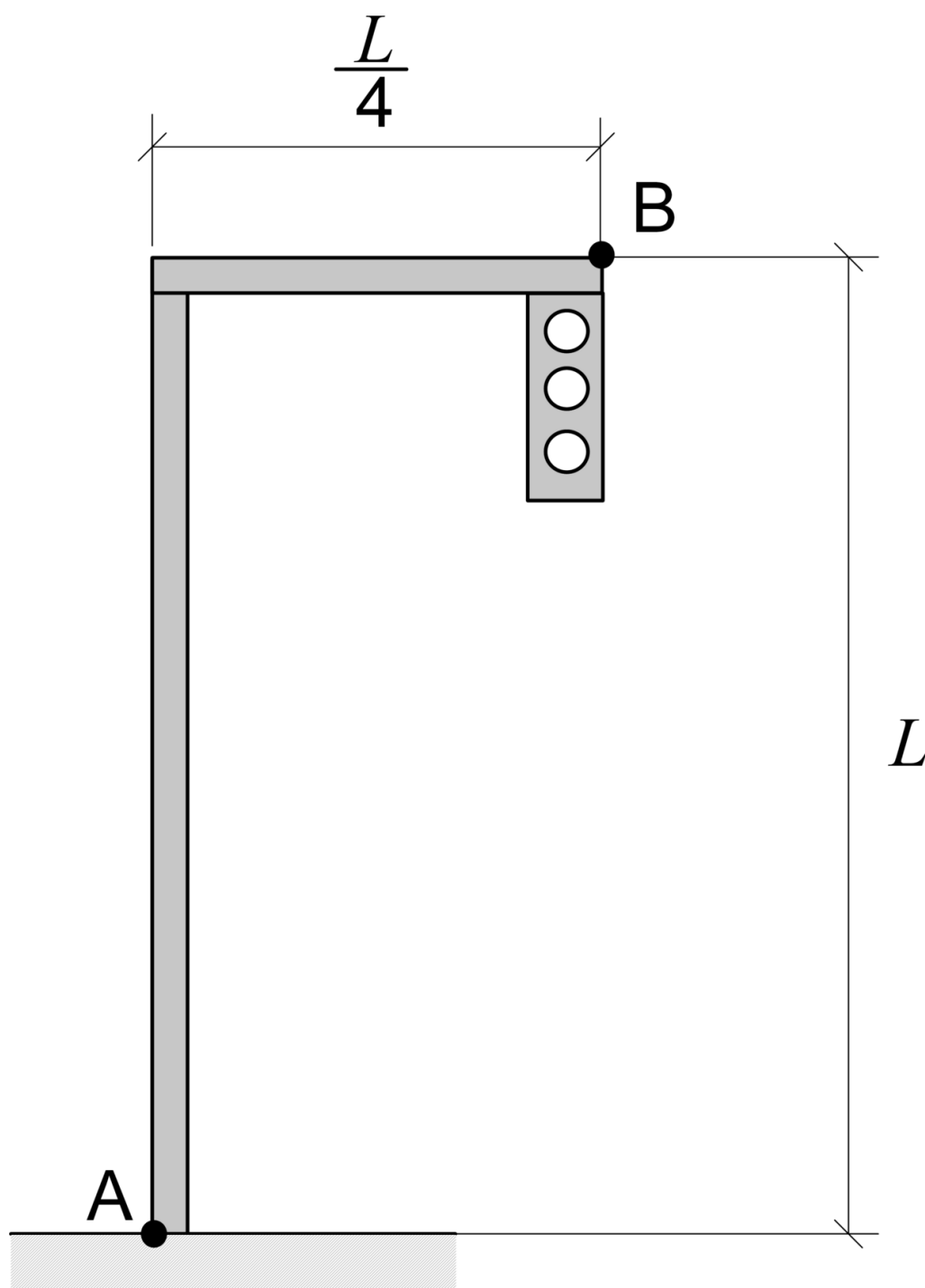
Como as transformações são isobáricas, e os gases estão à mesma pressão, podemos usar:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V + Sx}{300 + 100} = \frac{V - Sx}{300 - 100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V + Sx = 2V - 2Sx \Rightarrow x = V/3S$$



Questão 21



Inicialmente, um poste, fabricado com material de coeficiente de dilatação volumétrica γ , tem as dimensões indicadas na figura, estando o ponto A fixo. Ao ser submetido a um aumento de temperatura T , o ponto B é deslocado de:

A () $\frac{\sqrt{17}\gamma TL}{4}$

B () $\frac{5\gamma TL}{12}$

C () $\frac{\sqrt{17}\gamma TL}{21}$

D () $\frac{\sqrt{17}\gamma TL}{12}$

E () $\frac{\gamma TL}{4}$

Gabarito: D

O ponto B sofre deslocamento proveniente da dilatação da barra vertical e da dilatação da barra horizontal. Portanto, podemos escrever:

$$\begin{cases} \Delta S_x = \frac{L}{4} \alpha T \\ \Delta S_y = L \alpha T \end{cases}$$

$$\Delta S_B = \sqrt{\Delta S_x^2 + \Delta S_y^2}$$

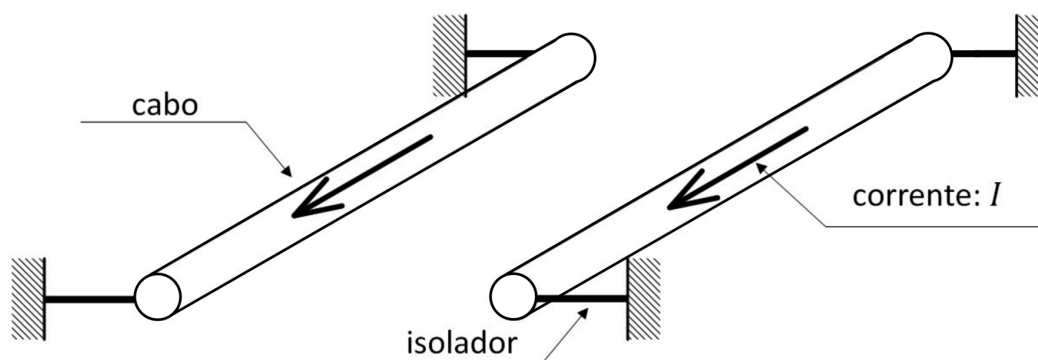
Portanto, substituindo tudo em ΔS_B :

$$\Delta S_B = \sqrt{L^2 \alpha^2 T^2 \left(\frac{1}{4^2} + 1^2 \right)} = \frac{LaT}{4} \cdot \sqrt{17}$$

Sabemos que $\alpha = \frac{\gamma}{3}$, logo:

$$\Delta S_B = \frac{\sqrt{17} \gamma L T}{12}$$

Questão 22



Um sistema de distribuição em corrente contínua contém um circuito com 2 cabos condutores rígidos idênticos ligados em paralelo, fixados por isoladores de borracha e posicionados conforme mostra a figura.

Dados:

- distância entre os centros dos cabos: 5 cm;
- permeabilidade magnética do meio: $8\pi \cdot 10^{-7} \text{ T.m/A}$;
- força máxima admissível nos isoladores por unidade de área: $625 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$;
- comprimento de cada cabo: 10 m;
- área da seção transversal dos isoladores: 10 mm^2 .

Observação:

- use a aproximação de fios infinitos para o cálculo dos campos magnéticos.

A máxima corrente do circuito I , em A, que pode circular simultaneamente em cada um dos cabos, sem o rompimento dos isoladores, é:

A () $625/\sqrt{2}$

B () 625

C () $625\sqrt{3}$

D () 1250

E () 2500

Gabarito: D

Esquemmatizando o problema, calculando a força magnética que um fio atua no outro.

$$F_{mag} = BiL = \frac{\mu i}{2\pi d} \cdot i \cdot L = \frac{\mu i^2 L}{2\pi d}$$

Pelos dados do enunciado.



$$F_{mag} = i^2 \cdot \frac{8\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 8 \cdot 10^{-5} \cdot i^2$$

Calculando a força máxima que um fio pode sofrer.

$$F_{mx} = 625 \cdot 10^4 \cdot 10^{-5} = 625 \cdot 10^{-1} \text{ N}$$

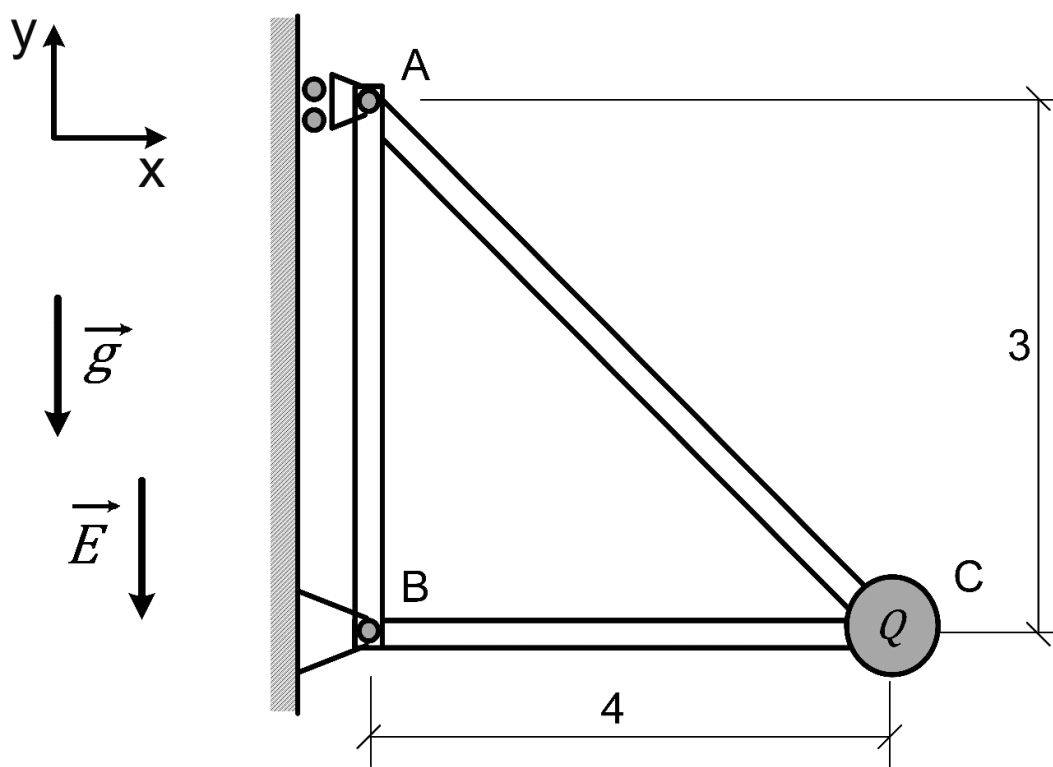
Dessa forma a corrente máxima ocorre quando os fios estão sofrendo a força máxima a que estão sujeitos.

$$F_{mag} = 2 \cdot F_{mx}$$

$$8 \cdot 10^{-5} \cdot i^2 = 2 \cdot 625 \cdot 10^{-1}$$

$$i = 1250 \text{ A}$$

Questão 23



A figura apresenta uma estrutura formada pelas barras AB, BC e CA. Essa estrutura está apoiada na parede vertical nos pontos A e B. O apoio A permite reações apenas na direção do eixo x, enquanto o apoio B permite reações nas direções dos eixos x e y. Na extremidade C da estrutura está posicionada uma partícula de carga Q e massa M . A estrutura está em uma região do espaço submetida a um campo elétrico vertical de módulo E e sentido de cima para baixo.

Dados:

- comprimento da barra BC: 4 m;
- comprimento da barra AB: 3 m;
- massa da barra BC: 2,5 kg;
- massa da partícula: $M = 0,3$ kg;
- carga da partícula: $Q = -5$ C;
- intensidade do campo elétrico: 4,6 N/C;
- aceleração da gravidade: $g = 10$ m/s².

Observações:

- os apoios não admitem torque;
- as massas das barras AB e AC são desprezíveis;
- a distribuição de massa da barra BC é uniforme.

O módulo da reação no apoio A, em N, é aproximadamente:

A () 10

B () 17

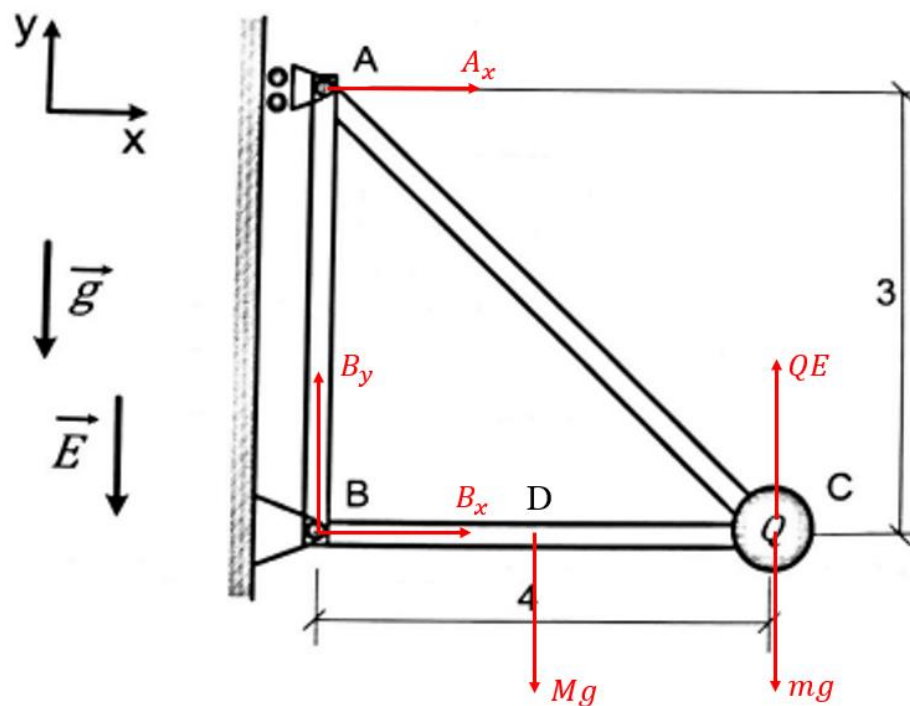
C () 19

D () 21

E () 23

Gabarito: A

Marcando as forças na barra:



Para o sistema estar em equilíbrio, devemos ter que o torque resultante sobre cada ponto da estrutura seja zero. Diante disso, vamos calcular o torque resultante sobre o ponto D, centro de massa da barra BC.

Na figura da solução, Mg denota o peso da barra BC ($2,5 \cdot 10 = 25$ N) e mg denota o peso da partícula ($0,3 \cdot 10 = 3$ N); $QE = 5 \cdot 4,6 = 23$ N é a força elétrica, para cima, sobre a partícula de carga negativa no campo para baixo.

$$A_x \cdot 3 + Mg \cdot 2 = (QE - mg) \cdot 4$$

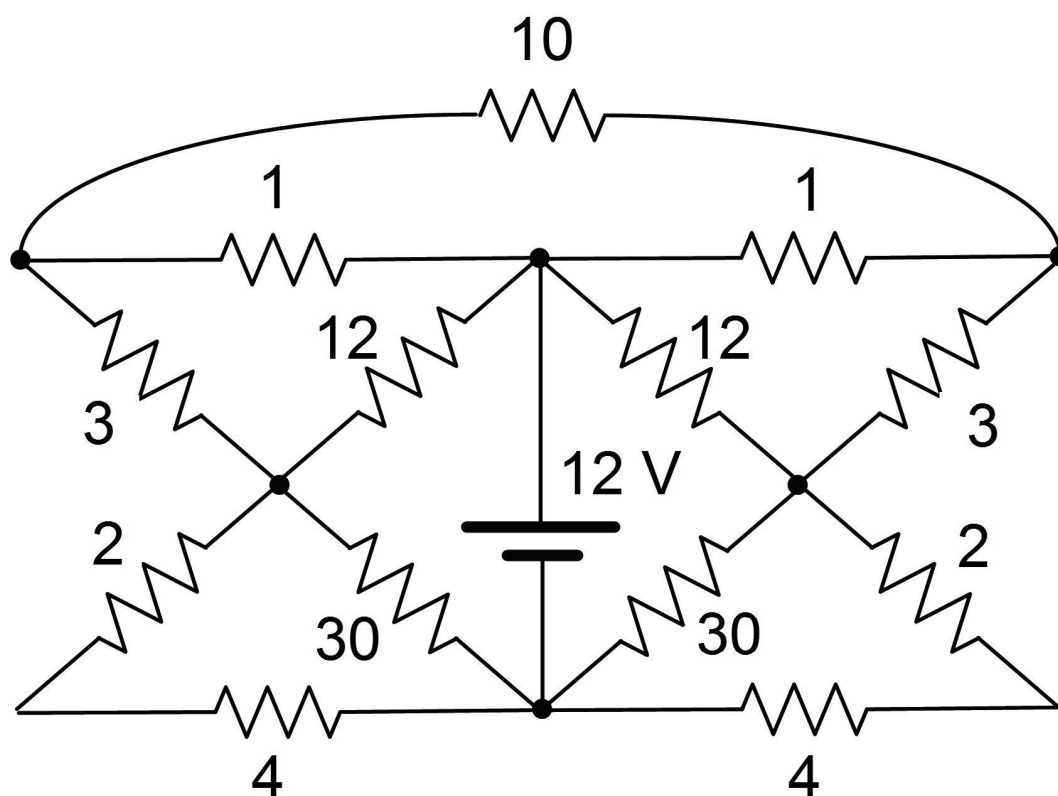
$$3A_x + 25 \cdot 2 = (23 - 3) \cdot 4$$

$$3A_x = 80 - 50 = 30$$

$$A_x = 10 \text{ N}$$



Questão 24



No circuito da figura, os valores de resistência apresentados encontram-se em Ω . A potência, em W, fornecida pela fonte é:

A () 18

B () 36

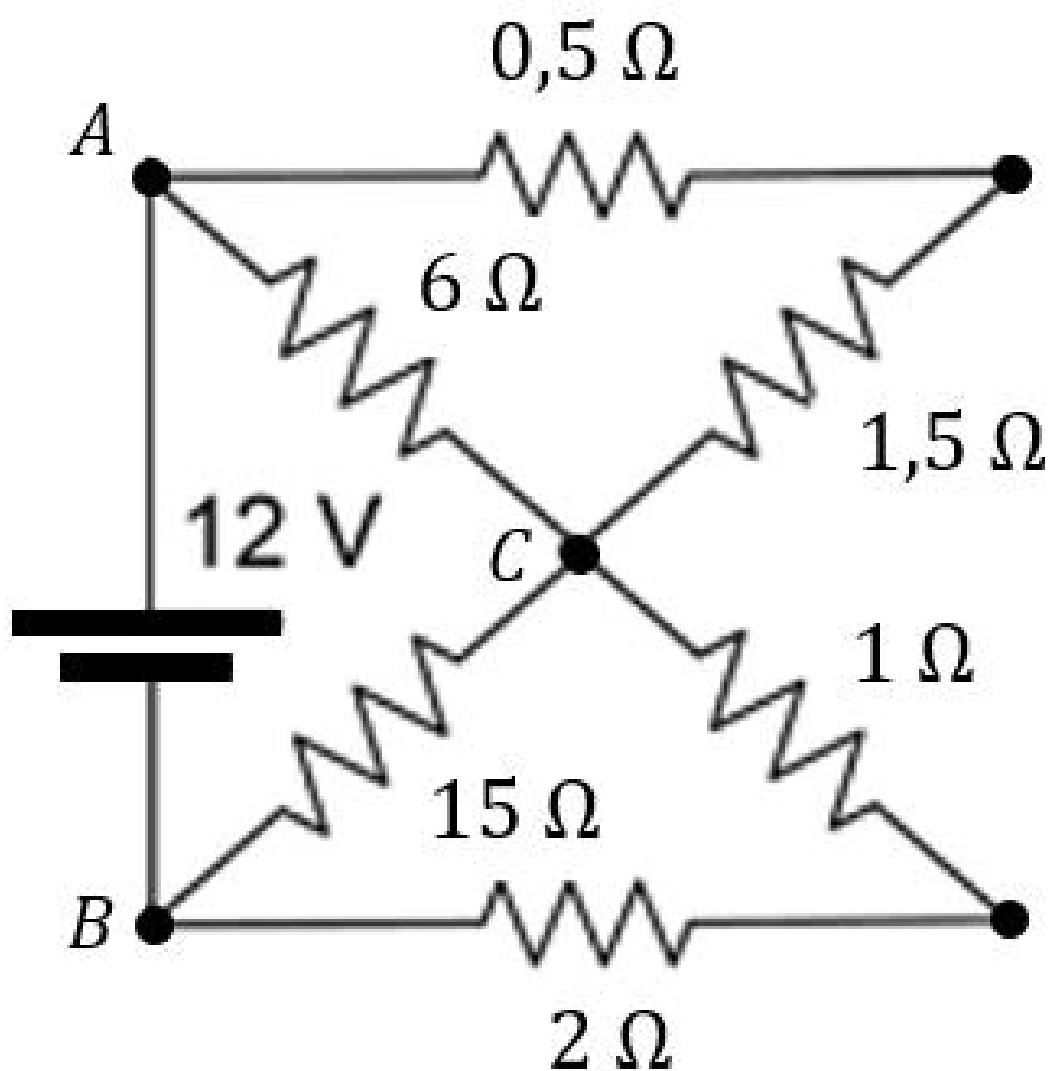
C () 54

D () 72

E () 96

Gabarito: B

Podemos perceber que o circuito possui uma simetria. Assim, nota-se que o resistor de 10Ω está ligado entre pontos de mesmo potencial, e assim, podemos redesenhar o circuito da seguinte forma:

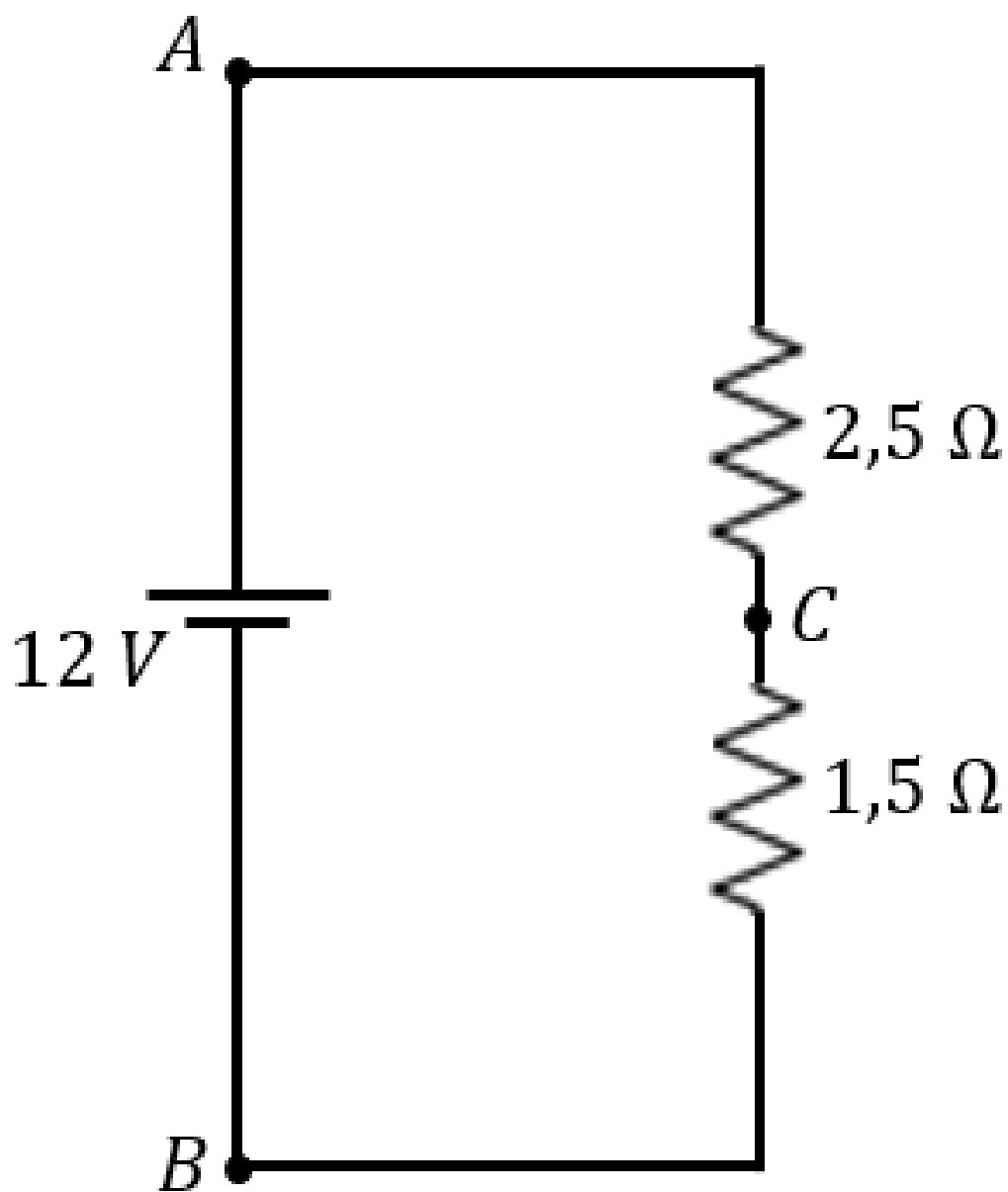


Calculando as resistências equivalentes entre AC e CB, temos:

$$R_{AC} = \frac{6 \cdot 2}{6 + 2} = 1,5 \, \Omega$$

$$R_{CB} = \frac{15 \cdot 3}{15 + 3} = 2,5 \, \Omega$$

Assim, podemos desenhar o circuito novamente:



Logo, como a resistência equivalente entre A e B é $R_{eq} = 2,5 + 1,5 = 4\Omega$, podemos calcular a potência gerada da seguinte forma:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{12^2}{4} \Rightarrow P = 36 \text{ W}$$



Questão 25

Um satélite artificial move-se por uma órbita aproximadamente circular estável em torno de um planeta. Posteriormente, o satélite acelera até a velocidade de escape do campo gravitacional em que se encontra devido ao impulso recebido pela ejeção de gases.

Dados:

- constante universal da gravitação: G ;
- raio da órbita circular estável original do satélite: r ;
- massa do planeta: M ;
- $\sqrt{2} \approx 1,41$.

A diferença entre o módulo da velocidade de escape do satélite e o módulo da sua velocidade na órbita estável original é de aproximadamente:

- A () $0,59\sqrt{GM/r}$ B () $1,41\sqrt{GM/r}$ C () $0,41\sqrt{GM/r}$ D () $2,41\sqrt{GM/r}$ E () $2,82\sqrt{GM/r}$

Gabarito: C

Calculando a velocidade de m ao percorrer uma órbita circular. Para isso vamos utilizar que, para a trajetória ser uma circunferência, devemos ter que a força gravitacional seja a resultante centrípeta.

$$F_g = F_{ctp} \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Calculando a velocidade de escape, sabendo que essa é a velocidade mínima para que o satélite escape da órbita de M .

$$E_{ml} = E_{mf} \Rightarrow -\frac{GMm}{r} + \frac{mv_e^2}{2} = 0 + 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

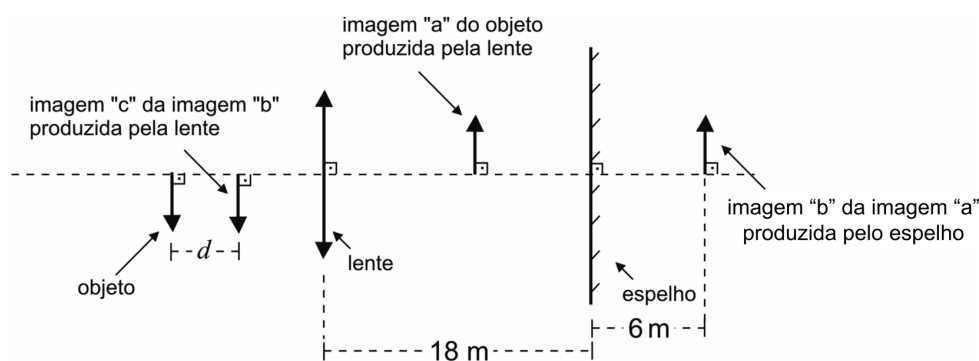
Calculando o valor pedido pelo enunciado, $\Delta v = v_e - v$.

$$\Delta v = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Pelo dado do enunciado:

$$\Delta v = 0,41\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Questão 26



Um objeto encontra-se sobre o eixo central de uma lente convergente delgada, em algum ponto à esquerda da lente. A imagem desse objeto produzida pela lente está indicada na figura como imagem "a". Um espelho plano reflete a imagem "a", produzindo uma imagem "b". Por sua vez, a imagem "b", ao passar de volta pela lente, produz a imagem "c".

Dado:

- distância focal da lente (em ambos os lados da lente): 4 m.

A distância d , indicada na figura, entre o objeto e a imagem "c" final, em centímetros, é:

A () 80

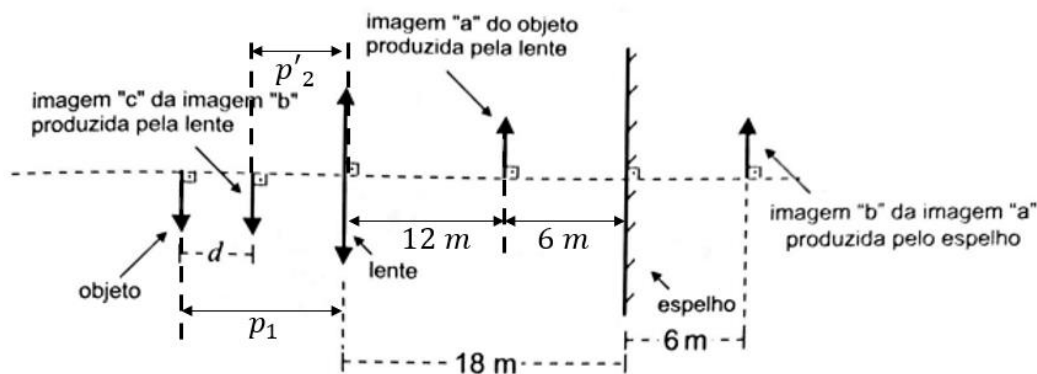
B () 120

C () 180

D () 480

E () 600

Gabarito: B



Calculando o valor de p_1 .

$$f = \frac{p_1 \cdot p}{p_1 + p} \Rightarrow 4 = \frac{12p_1}{p_1 + 12} \Rightarrow p_1 = 6 \text{ m}$$

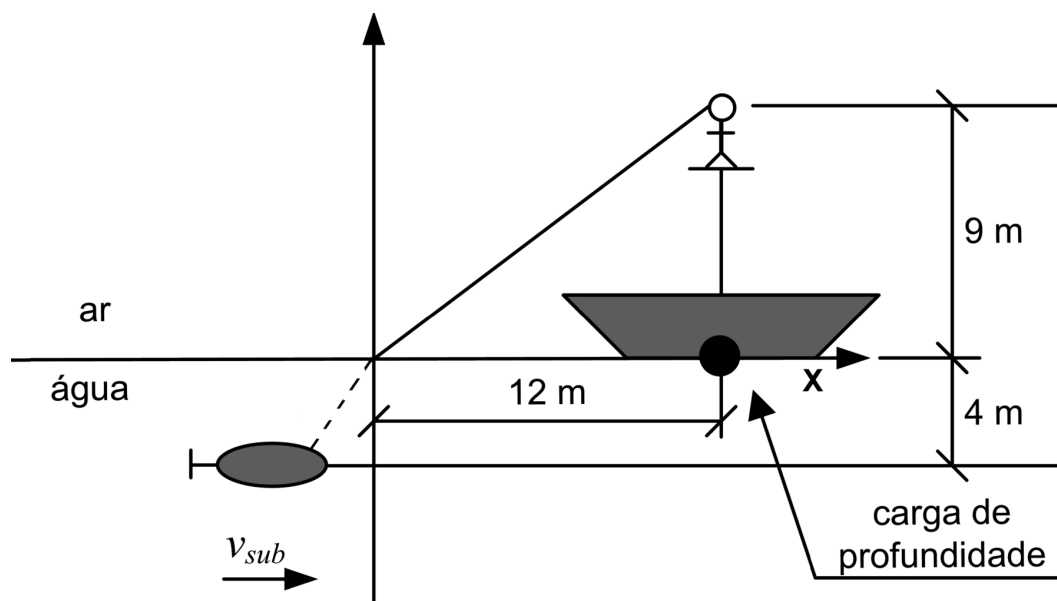
Calculando o valor de p'_2 , aonde $p = 24$ m.

$$f = \frac{p \cdot p'_2}{p + p'_2} \Rightarrow 4 = \frac{24 \cdot p'_2}{24 + p'_2} \Rightarrow p'_2 = 4,8 \text{ m}$$

Mas, da imagem sabemos que:

$$d = p_1 - p'_2 = 6 - 4,8 \Rightarrow p = 1,2 \text{ m} = 120 \text{ cm}$$

Questão 27



Um navio de guerra encontra-se parado com um marinheiro de vigia em um posto de observação 9 m acima do nível do mar. Em um determinado instante, esse marinheiro avista um submarino aproximando-se na direção do eixo x , à velocidade constante e a 4 m de profundidade, conforme ilustra a figura. No instante em que o submarino é avistado, uma carga de profundidade é liberada do navio e, depois de um certo tempo, o submarino é destruído ao ser atingido pela carga de profundidade.

Dados:

- velocidade inicial da carga de profundidade: 0 m/s;
- aceleração da gravidade: 10 m/s^2 ;
- volume da carga de profundidade: $0,001 \text{ m}^3$;
- massa específica da água: 1000 kg/m^3 ;
- massa da carga de profundidade: 1,8 kg;
- índice de refração do ar: 1;
- índice de refração da água: $4/3$.

Observação:

- considere constante o empuxo sobre a carga de profundidade.

Diante do exposto, a velocidade do submarino, em m/s, era de:

A () $5\sqrt{5}$

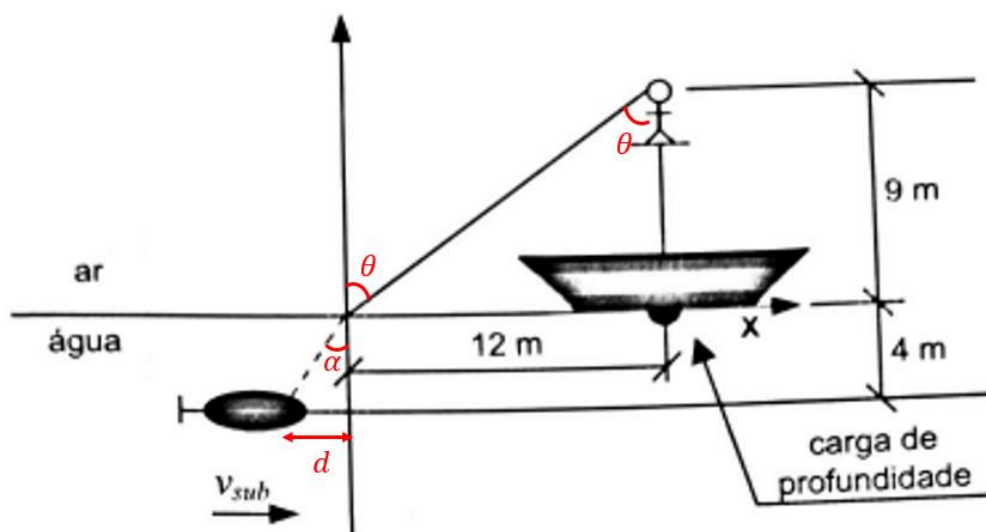
B () $5\sqrt{3}$

C () $6\sqrt{5}$

D () $6\sqrt{3}$

E () $4\sqrt{3}$

Gabarito: A



Pela lei de Snell, temos que:

$$n_{ar} \sin(\theta) = n_{gua} \sin(\alpha)$$

Pelos dados do problema:

$$1 \cdot \frac{12}{\sqrt{12^2 + 9^2}} = \frac{4}{3} \cdot \sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$$

Analisando a geometria do problema:

$$\sin(\alpha) = \frac{3}{5} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4^2}}$$

$$d = 3 \text{ m}$$

Calculando a aceleração sofrida pela carga de profundidade:

$$F_r = ma = mg - \rho_{gua} \cdot g \cdot V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = g - \frac{\rho_{gua} \cdot g \cdot V}{m} = 10 - \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,001}{1,8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{40}{9} \text{ m/s}^2$$

Calculando o tempo para que a carga de profundidade atinja a linha de altura do submarino.

$$\frac{at^2}{2} = 4 \Rightarrow \frac{\frac{40}{9} \cdot t^2}{2} = 4 \Rightarrow t = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

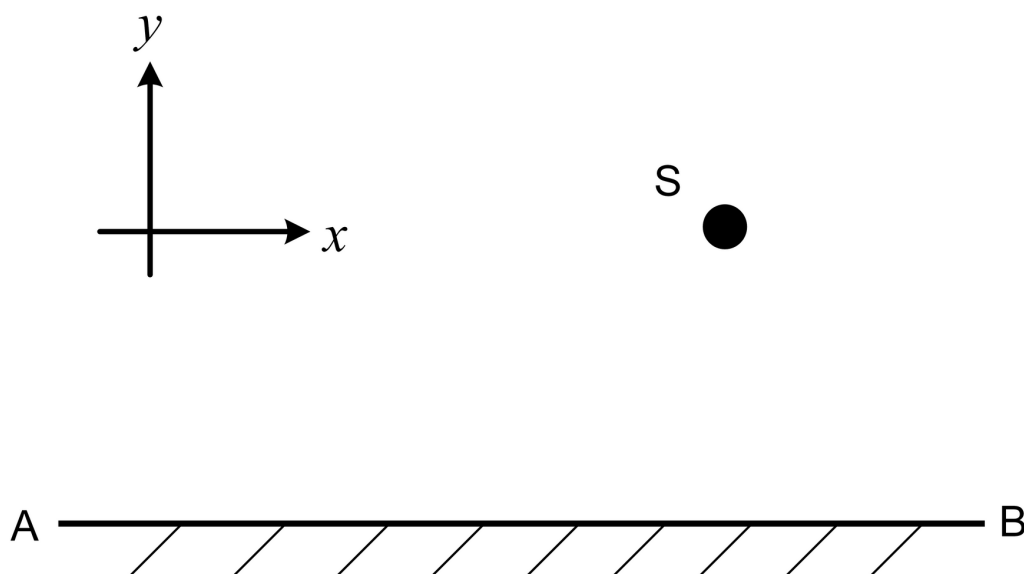
Calculando a velocidade do navio, sabendo que a carga de profundidade e o submarino se encontram após t .

$$v \cdot t = d + 12 \Rightarrow v \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = 12 + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = 5\sqrt{5} \text{ m/s}$$



Questão 28



Na figura, uma partícula S e os pontos extremos A e B de um espelho plano movem-se no plano xy de acordo com as seguintes equações paramétricas para as coordenadas (em metros) em função do instante $t > 0$ (em segundos):

$$\begin{cases} x_A(t) = 5 + t \\ y_A(t) = -5 - 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x_B(t) = 10 + t \\ y_B(t) = -5 - 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x_S(t) = \sin(t) \\ y_S(t) = \cos(t) \end{cases}$$

Observação:

- o plano do espelho é ortogonal ao plano xy .

A maior velocidade escalar atingida pela imagem da partícula no espelho, em m/s, é:

A () 3

B () $\sqrt{17}$

C () $2(1 + \sqrt{5})$

D () 5

E () $2\sqrt{5}$

Gabarito: D

Analisando as equações horárias dos pontos A e B. Primeiramente percebemos que a altura entre esses dois pontos sempre vai ser a mesma, ou seja, o plano do espelho sempre será paralelo ao plano xz .

Dessa forma, vamos calcular a posição da imagem formada após a reflexão de S no espelho.

A coordenada y é dada pela seguinte fórmula:

$$y_i = 2y_e - y_s$$

$$y_i = -10 - 4t - \cos t$$

A coordenada x é mantida, devido ao argumento anterior:

$$x_i = x = \sin t$$

Logo, encontrando a posição da imagem em função do tempo:

$$S_i = (\sin t, -10 - 4t - \cos t)$$

Agora iremos derivar a fim de achar a velocidade da imagem:

$$v_i = (-\cos t, -4 + \sin t)$$

Calculando o módulo da velocidade da imagem:

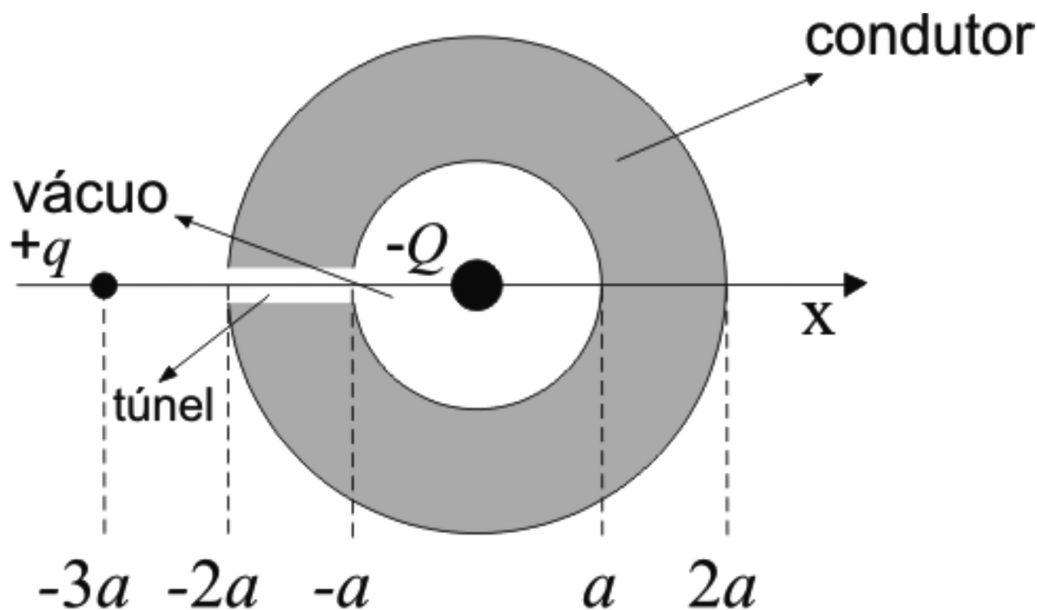
$$|v_i| = \sqrt{\sin^2 t - 8 \sin t + 16 + \cos^2 t} = \sqrt{17 - 8 \sin t}$$

Maximizando a expressão ($\sin t = -1$):



$$v_{mx} = \sqrt{17 + 8} = 5$$

Questão 29



O arranjo da figura é composto por uma casca esférica condutora oca de espessura a com uma partícula de carga negativa fixada em seu centro. A casca possui um túnel muito estreito em torno do eixo x , por onde uma partícula de carga positiva, inicialmente em repouso, pode atravessá-la.

Dados:

- massa da partícula de carga positiva: m ;
- carga da partícula positiva: $+q$;
- carga da partícula negativa: $-Q$;
- constante eletrostática do meio não condutor (vácuo): k ;
- raio interno da casca condutora: a ;
- raio externo da casca condutora: $2a$;
- posição inicial da partícula positiva: $x = -3a$;
- posição da partícula negativa: fixa em $x = 0$.

Observações:

- $|q| \ll |Q|$;
- a carga da partícula positiva é pequena o suficiente para não afetar o equilíbrio eletrostático na casca esférica condutora;
- despreze qualquer concentração de cargas nas paredes do túnel;
- o eixo x passa pelo centro da casca;
- a casca condutora está fixa e com carga total nula.

Ao ser liberada do repouso, a partícula positiva atinge a velocidade v em $x = -a$. Pode-se afirmar que v^2 é:

A () $\frac{kqQ}{2am}$

B () $\frac{kqQ}{3am}$

C () $\frac{4kqQ}{3am}$

D () $\frac{3kqQ}{2am}$

E () $\frac{kqQ}{am}$

Gabarito: B

Inicialmente, tem-se que a carga $-Q$ induzirá carga $+Q$ na superfície interna da esfera e, conseqüentemente, como a esfera tem carga nula, a carga na superfície externa será $-Q$. Com isso, tem-se três distribuições de carga que contribuem com o potencial elétrico nos pontos do espaço onde a partícula $+q$ passa.

Como se tem apenas forças conservativas:

$$\Delta E_{mec} = 0 \Rightarrow \Delta E_{pot} + \Delta E_c = 0$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_{pot} = W_{Fel}$$

$$\Delta E_c = +qU$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} - 0 &= +q \left[\left(\frac{k(-Q)}{3a} + \frac{k(Q)}{3a} + \frac{k(-Q)}{3a} \right) - \left(\frac{k(-Q)}{a} + \frac{k(Q)}{a} + \frac{k(-Q)}{a} \right) \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{kQq}{6a} \Rightarrow v^2 = \frac{kQq}{3am} \end{aligned}$$

Questão 30

A espaçonave CEOS passa pelo corpo celeste Al-Quds com velocidade relativa de $0,6c$, onde c é a velocidade da luz no vácuo. No instante em que CEOS e Al-Quds estão alinhados, os relógios do comandante da espaçonave (t_{CEOS}) e de um observador situado em Al-Quds (t_{QUDES}) são sincronizados e zerados. A espaçonave emite uma luz muito intensa no instante em que o comandante da espaçonave marca $t_{CEOS} = 4$ s após sua passagem por Al-Quds.

Dado:

- $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Observação:

- admita o corpo celeste Al-Quds como sendo um referencial inercial e que a espaçonave se movimenta sempre em linha reta.

Tomando como referencial o observador em Al-Quds, o instante t_{QUDES} do início da emissão da luz pela CEOS e a distância percorrida pela CEOS desde a passagem por Al-Quds até esse instante são, respectivamente:

A () 3,2 s e $7,2 \times 10^8$ m

B () 3,2 s e $12,0 \times 10^8$ m

C () 5,0 s e $11,25 \times 10^8$ m

D () 5,0 s e $7,2 \times 10^8$ m

E () 5,0 s e $9,0 \times 10^8$ m

Gabarito: E

Como quem mediu a distância foi o capitão da nave CEOS, podemos afirmar que este é o referencial próprio para esse evento, já que a observação do relógio ocorre no mesmo local, na nave CEOS. Dito isso, $t_{prprio} = 4$ s

Agora, para encontrar o intervalo de tempo entre dois eventos em um referencial que não seja o próprio, devemos utilizar a correção por meio do fator de Lorentz.

$$t(QUDES) = t(CEOS) \cdot \gamma(QUDES)$$

Aonde, para encontrar o $\gamma(QUDES)$ devemos utilizar a velocidade relativa de Al-Quds em relação a Ceos. Dessa forma:

$$\gamma(QUDES) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v(QUDES)}{c}\right)^2}}$$

$$\gamma(QUDES) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,6^2}} = \frac{5}{4}$$

Com isso: $t(QUDES) = 4 \cdot \frac{5}{4} = 5$ s

Com a mesma ideia, vamos analisar a distância entre os dois corpos no referencial de Al-Quds.

$$d(QUDES) = \frac{d(CEOS)}{\gamma(QUDES)}$$

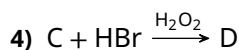
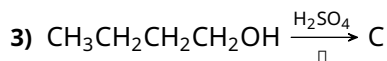
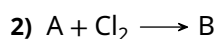
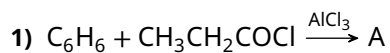
$$d(QUDES) = (4 \cdot 0,6 \cdot 3 \cdot 10^8) \cdot \left(\frac{5}{4}\right)$$



$$d(QUDS) = 9 \cdot 10^8 \text{ m}$$

**GABARITO QUÍMICA****Questão 31**

Considere as reações na sequência abaixo:



Sabendo que A, B, C e D representam os compostos orgânicos formados majoritariamente em cada uma das reações, a alternativa que contém as nomenclaturas viáveis para cada um desses compostos, respectivamente, é:

A () 1-fenilpropan-1-ona; 1-(3-clorofenil)propan-1-ona; but-1-eno; 1-bromo-butano

B () 1-fenilpropan-2-ona; 1-(4-clorofenil)propan-2-ona; but-2-eno; 1-bromo-butano

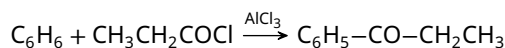
C () 1-fenilpropan-1-ona; 1-(3-clorofenil)propan-1-ona; but-1-eno; 2-bromo-butano

D () 1-fenilpropan-2-ona; 1-(4-clorofenil)propan-2-ona; but-1-eno; 2-bromo-butano

E () 1-fenilpropan-1-ona; 3-(3-clorofenil)propan-2-ona; but-2-eno; 2-bromo-butano

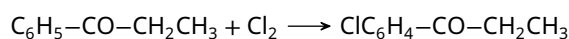
Gabarito: A

Reação 1. Acilação de Friedel-Crafts.



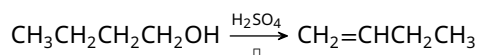
A. 1-fenilpropan-1-ona

Reação 2. Cloração na posição *meta* (o grupo acila é desativante e meta-dirigente).



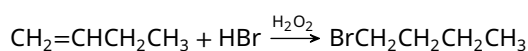
B. 1-(3-clorofenil)propan-1-ona

Reação 3. Desidratação intramolecular de álcool.



C. but-1-eno

Reação 4. Adição de HBr anti-Markovnikov (efeito peróxido).



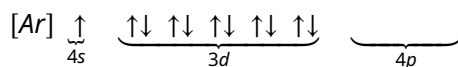
D. 1-bromobutano



Questão 32

Considere o esboço parcial da Tabela Periódica, com as colunas numeradas de 1 a 18 (grupos).

Sabe-se que um cátion trivalente apresenta o seguinte diagrama de preenchimento orbital:



O elemento químico correspondente a esse cátion é o:

A () Al

B () Cu

C () Ni

D () Ge

E () Se

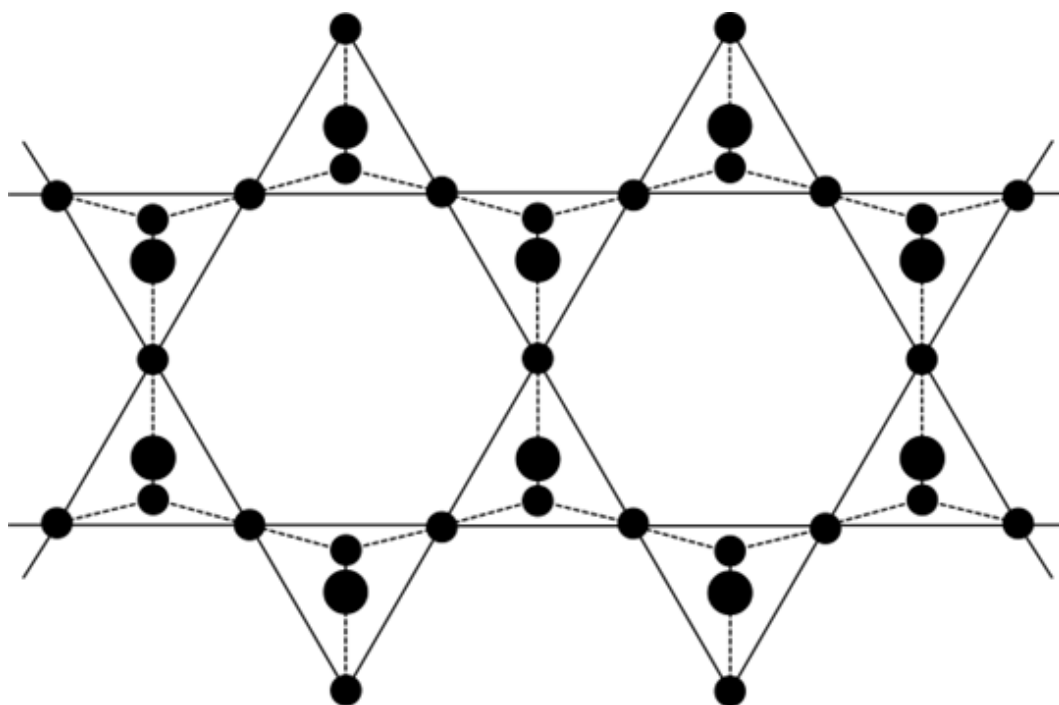
Gabarito: D

O cátion trivalente possui 29 elétrons (18 do [Ar], mais 1 do 4s e 10 do 3d), assim, só pode corresponder a um elemento que possui 32 elétrons no estado fundamental.

Assim, o elemento químico é o germânio, elemento do grupo 14.

Questão 33

“Amianto” é o nome genérico de muitos minerais fibrosos de silicatos. O amianto mais importante, o crisótilo, é um silicato de magnésio hidratado. O íon silicato do crisótilo é estruturado como linha dupla de tetraedros formados por átomos de Silício (círculos pretos) e de Oxigênio (círculos brancos), como representado na figura abaixo.

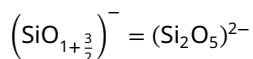


Diante do exposto, a composição geral do íon silicato do crisótilo é:

A () $(\text{SiO}_4)_n^{4n-}$ B () $(\text{Si}_2\text{O}_5)_n^{2n-}$ C () $(\text{Si}_2\text{O}_6)_n^{3n-}$ D () $(\text{Si}_4\text{O}_{11})_n^{6n-}$ E () $(\text{Si}_4\text{O}_{13})_n^{10n-}$

**Gabarito: B**

As cadeias duplas de unidades de silicato podem se ligar lateralmente para formar unidades de fórmula empírica $(\text{Si}_2\text{O}_5)^{2-}$. Cada tetraedro possui um átomo de silício central, um átomo de oxigênio axial (não compartilhado) e três átomos de oxigênio equatoriais compartilhados com outro tetraedro. Assim, a fórmula mínima dessa estrutura é:

**Questão 34**

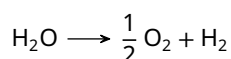
Um drone submarino estava navegando a 90 m de profundidade e a uma pressão de 10 atm, quando o casco sofreu uma avaria. Para trazê-lo à superfície, foi acionado um dispositivo de emergência, que produz hidrogênio por uma célula eletroquímica contendo 2 L de solução aquosa de H_2SO_4 com concentração 2 mol/L. A eletrólise foi encerrada quando o drone atingiu a superfície. Nesse momento, o restante da solução aquosa de H_2SO_4 foi analisado nas CNTP, tendo sido verificado que sua concentração era de 8 mol/L.

A única alternativa correta é:

- A** () A uma pressão de 10 atm, o catodo passou a agir como anodo e o anodo como catodo.
- B** () A estrutura interna do drone sofreu avarias, porque o H_2SO_4 decomposto no anodo gerou vapores corrosivos.
- C** () O volume de H_2O consumido foi de 1,5 L.
- D** () A massa de H_2SO_4 restante foi de 49 g.
- E** () O volume da solução aquosa de H_2SO_4 reduziu para 75% do seu valor inicial.

Gabarito: C

Eletrólise da água:



Primeiro, consideramos a diluição/concentração da solução aquosa de H_2SO_4 (a quantidade de H_2SO_4 não se altera, apenas o volume de água):

$$C_1 \cdot V_1 = C_2 \cdot V_2$$

$$2 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \cdot 2 \text{ L} = 8 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \cdot V_2$$

$$V_2 = 0,5 \text{ L}$$

O volume novo da solução será de 0,5 L. Significando que foram consumidos 1,5 L de H_2O na eletrólise da água.

**Questão 35**

Com relação aos compostos de interesse bioquímico abaixo, a alternativa INCORRETA é:

- A ()** Dentre os compostos timina, prolina, ácido aspártico e lisina, a timina é o único composto que não forma ligação peptídica.
- B ()** Os aminoácidos são anfóteros, podendo doar ou receber prótons (H^+) de acordo com o conceito ácido base de Brønsted-Lowry.
- C ()** O RNA tem em sua estrutura diferentes combinações dos nucleotídeos formados pelas bases nitrogenadas púricas adenina e guanina e pelas bases nitrogenadas pirimidínicas uracila e citosina.
- D ()** Os aminoácidos sintetizados em quantidade suficiente pelo sistema metabólico de certos organismos vivos são denominados não essenciais.
- E ()** Os aminoácidos valina e glicina são constituintes das proteínas, opticamente ativos e formam ligações peptídicas.

Gabarito: E

- A)** Verdadeiro. Prolina, ácido aspártico e lisina são aminoácidos que realizam ligações peptídicas, enquanto a timina é uma base nitrogenada.
- B)** Verdadeiro. Aminoácidos, por possuírem uma função ácido carboxílico, possuem caráter ácido, enquanto a função amina possui caráter básico, dando um caráter anfótero à espécie.
- C)** Verdadeiro. O RNA é um ácido nucleico composto pelos nucleotídeos formados pelas bases adenina e guanina (púricas) e uracila e citosina (pirimidínicas).
- D)** Verdadeiro. Aminoácidos não essenciais são aqueles produzidos em quantidade suficiente pelo nosso organismo, enquanto os essenciais precisam ser obtidos via alimentação, devido à baixa quantidade sintetizada.
- E)** Falso. A glicina, H_2N-CH_2-COOH , tem o carbono central ligado a dois átomos de hidrogênio, portanto não é um carbono estereogênico: a glicina não possui atividade óptica.

Questão 36

Considere cinco recipientes rígidos com o mesmo volume interno, nos quais são admitidas amostras de gases que são mantidas nas condições especificadas em cada opção abaixo. Levando em conta o comportamento de gases ideais, a alternativa que corresponde à maior pressão é:

- A ()** 16 g de metano nas CNTP.
- B ()** 8 g de oxigênio e 14,48 g de ar atmosférico a $0^\circ C$.
- C ()** 7 g de dióxido de carbono e 7 g de nitrogênio a $20^\circ C$.
- D ()** 8 g de oxigênio e 14 g de nitrogênio a $20^\circ C$.
- E ()** 13,6 g de amônia a $72^\circ C$.

Gabarito: E

Da equação dos gases ideais, $PV = nRT$:

A. Em CNTP, $T = 0^\circ C$ e $MM(CH_4) = 16 \text{ g/mol}$

$$PV = \frac{16g}{16 \text{ g/mol}} \cdot 0,082 \cdot 273 = 22,4 \text{ atm} \cdot L$$

B. $T = 0^\circ C$, $MM(O_2) = 32 \text{ g/mol}$, $MM(ar) = 29 \text{ g/mol}$

$$PV = \left(\frac{8g}{32 \text{ g/mol}} + \frac{14,48g}{29 \text{ g/mol}} \right) \cdot 0,082 \cdot 273 = 16,77 \text{ atm} \cdot L$$



C. $T = 20^\circ\text{C}$, $MM(\text{CO}_2) = 44 \text{ g/mol}$, $MM(\text{N}_2) = 28 \text{ g/mol}$

$$PV = \left(\frac{7\text{g}}{44 \text{ g/mol}} + \frac{7\text{g}}{28 \text{ g/mol}} \right) \cdot 0,082 \cdot 293 = 9,83 \text{ atm} \cdot \text{L}$$

D. $T = 20^\circ\text{C}$, $MM(\text{O}_2) = 32 \text{ g/mol}$, $MM(\text{N}_2) = 28 \text{ g/mol}$

$$PV = \left(\frac{8\text{g}}{32 \text{ g/mol}} + \frac{14\text{g}}{28 \text{ g/mol}} \right) \cdot 0,082 \cdot 293 = 18,02 \text{ atm} \cdot \text{L}$$

E. $T = 72^\circ\text{C}$, $MM(\text{NH}_3) = 17 \text{ g/mol}$

$$PV = \left(\frac{13,6\text{g}}{17 \text{ g/mol}} \right) \cdot 0,082 \cdot 365 = 23,94 \text{ atm} \cdot \text{L}$$

Questão 37

Uma alíquota de 100 mL de uma solução que contém íons de Cr^{2+} e Cr^{3+} foi titulada com 200 mL de KMnO_4 com concentração 0,01 mol/L (em ácido sulfúrico diluído), tendo sido todos os íons de Cr^{2+} oxidados a íons Cr^{3+} . Em seguida, uma outra alíquota de 100 mL da solução original foi tratada com Fe metálico para converter todos os íons de Cr^{3+} em íons de Cr^{2+} . A solução obtida consumiu 300 mL da mesma solução de KMnO_4 para a oxidação de todos os íons a Cr^{3+} .

A equação iônica simplificada é: $\text{KMnO}_4 + 5 \text{Cr}^{2+} \longrightarrow \text{Mn}^{2+} + 5 \text{Cr}^{3+} + 4 \text{H}_2\text{O} + \text{K}^+$

As concentrações molares de Cr^{2+} e de Cr^{3+} na solução original são:

A () $[\text{Cr}^{2+}] = 0,05 \text{ mol/L}$ e $[\text{Cr}^{3+}] = 0,1 \text{ mol/L}$.

B () $[\text{Cr}^{2+}] = 0,1 \text{ mol/L}$ e $[\text{Cr}^{3+}] = 0,05 \text{ mol/L}$.

C () $[\text{Cr}^{2+}] = 0,004 \text{ mol/L}$ e $[\text{Cr}^{3+}] = 0,002 \text{ mol/L}$.

D () $[\text{Cr}^{2+}] = 0,1 \text{ mol/L}$ e $[\text{Cr}^{3+}] = 0,15 \text{ mol/L}$.

E () Não é possível calcular as concentrações sem conhecer a razão entre elas na solução original.

Gabarito: B

I. Primeira reação: titulação de permanganato de potássio e crômio II.

$$5n_{\text{KMnO}_4} = n_{\text{Cr}^{2+}}$$

$$5 \cdot C_{\text{KMnO}_4} \cdot V_{\text{KMnO}_4} = n_{\text{Cr}^{2+}}$$

$$n_{\text{Cr}^{2+}} = 5 \cdot 0,01 \cdot 0,2 \text{ mol}$$

$$n_{\text{Cr}^{2+}} = 0,01 \text{ mol}$$

II. Segunda reação: todo o crômio III é reduzido para crômio II (com o Fe metálico).

III. Terceira reação: reação do permanganato com a quantidade total de íons crômio.

$$n_{(\text{Cr}^{2+} + \text{Cr}^{3+})} = 5n_{\text{KMnO}_4}$$

Logo,

$$0,01 \text{ mol} + n_{\text{Cr}^{3+}} = 5 \cdot 0,01 \cdot 0,3 \text{ mol}$$

Finalmente:

$$n_{\text{Cr}^{3+}} = 0,005 \text{ mol}$$

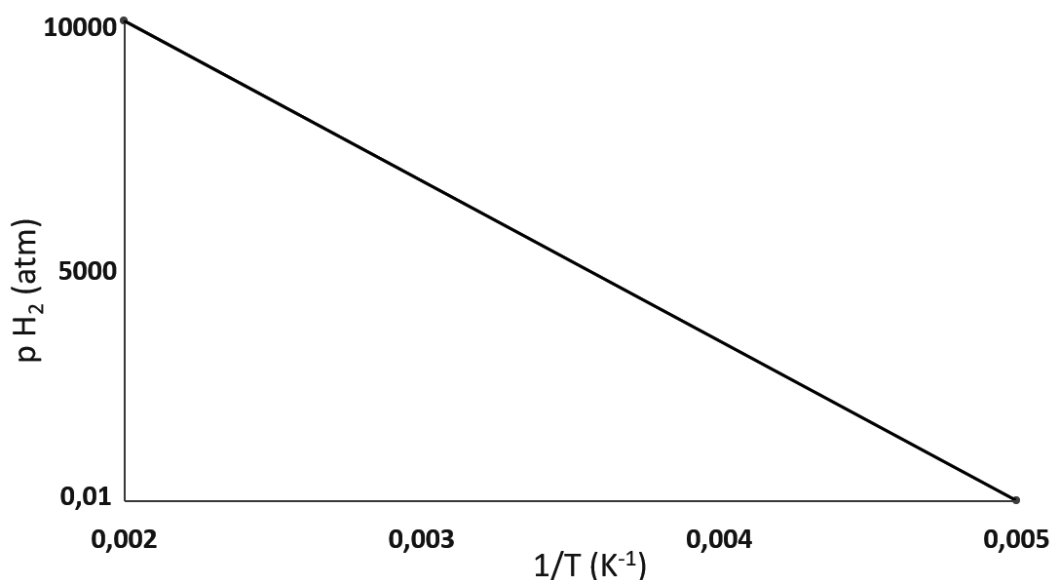
$$[\text{Cr}^{2+}] = 0,01 \frac{\text{mol}}{0,1\text{L}} = 0,1 \text{ mol/L}$$



$$[\text{Cr}^{3+}] = 0,005 \frac{\text{mol}}{0,1\text{L}} = 0,05 \text{ mol/L}$$

Questão 38

O cálcio metálico reage com hidrogênio gasoso para produzir hidreto metálico. A pressão de equilíbrio do hidrogênio gasoso em função do inverso da temperatura absoluta dessa reação segue o gráfico a seguir.



Dados:

- $R = 8,0 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
- $\ln(10) = 2,3$

O calor, em kJ, envolvido na produção de 1 mol desse hidreto, a pressão constante de 1 atm, considerando comportamento de gás ideal, é aproximadamente igual a:

A () -37

B () -25

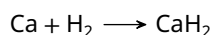
C () 0

D () +25

E () +37

Gabarito: A

A reação entre o cálcio metálico e o hidrogênio é:



A constante de equilíbrio dessa reação é:

$$K_p = \frac{1}{p_{\text{H}_2}}$$

Logo, pela equação de van't Hoff:

$$\ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right) = \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -\frac{\Delta H}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

Substituindo os pontos nos extremos do gráfico ($P = 10000 \text{ atm}$ em $1/T = 0,002$ e $P = 0,01 \text{ atm}$ em $1/T = 0,005$):

$$\ln\left(\frac{0,01}{10000}\right) = -\frac{\Delta H}{8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})} (0,002 - 0,005)$$

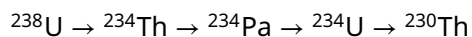
Finalmente:

$$\Delta H = -37 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$$

**Questão 39**

O gás hélio, raro na Terra, origina-se notadamente do decaimento radioativo dos tipos α e β dos elementos Urânio-238 e Tório-234, sendo encontrado em depósitos de gás natural.

Sabe-se que o esquema de decaimentos até a ocorrência do isótopo Tório-230 é:

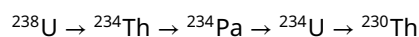


Portanto, a partir de 1 mol de Urânio-238 e de 1 mol de Tório-234, até a ocorrência de Tório-230, obtém-se, no máximo:

- A** () 1 mol de He. **B** () 2 mols de He. **C** () 3 mols de He.
D () 4 mols de He. **E** () nenhum mol de He.

Gabarito: C

O esquema de decaimentos é:



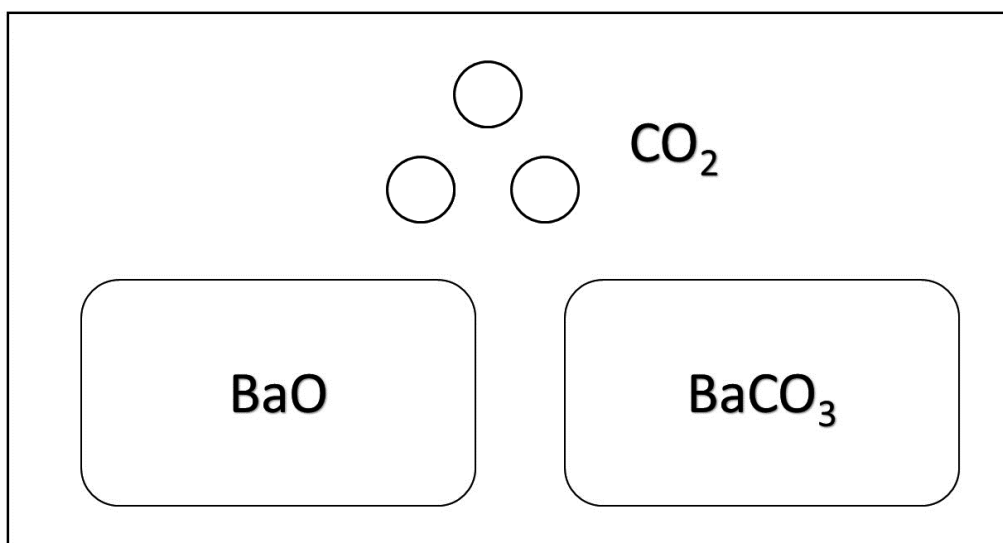
com as partículas liberadas em cada etapa sendo, respectivamente, α , β , β e α .

Assim, 1 mol de Urânio-238 leva à liberação de duas partículas α (nas etapas $^{238}\text{U} \rightarrow ^{234}\text{Th}$ e $^{234}\text{U} \rightarrow ^{230}\text{Th}$), e 1 mol de Tório-234 leva à liberação de uma partícula α (na etapa $^{234}\text{U} \rightarrow ^{230}\text{Th}$, a partir do U-234 formado por ele), totalizando 3 mols de partículas α , que podem formar, no máximo, 3 mols de He.



Questão 40

Na figura abaixo encontra-se ilustrada uma mistura em equilíbrio composta por $\text{BaCO}_3(s)$, $\text{BaO}(s)$ e $\text{CO}_2(g)$, em sistema fechado, resultante da decomposição endotérmica do carbonato de bário.



Considere as seguintes situações, tendo por base as moléculas de $\text{CO}_2(g)$:

- i) o equilíbrio após uma adição de moléculas de $\text{CO}_2(g)$, de forma a triplicar a quantidade desse gás; e
- ii) a mistura em equilíbrio a uma temperatura mais elevada.

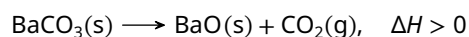
A alternativa que melhor ilustra as situações i e ii, respectivamente, é:

(A)		e	
(B)		e	
(C)		e	
(D)		e	
(E)		e	

- A** () Muito mais moléculas de CO_2 que na mistura inicial e, na sequência, ainda mais moléculas de CO_2 .
- B** () A mesma quantidade de moléculas de CO_2 da mistura inicial e, na sequência, nenhuma molécula de CO_2 .
- C** () Nenhuma molécula de CO_2 e, na sequência, a mesma quantidade de moléculas de CO_2 da mistura inicial.
- D** () Muito mais moléculas de CO_2 que na mistura inicial e, na sequência, quase nenhuma molécula de CO_2 .
- E** () A mesma quantidade de moléculas de CO_2 da mistura inicial e, na sequência, muito mais moléculas de CO_2 .

**Gabarito: E**

A reação de decomposição térmica do carbonato de bário é:



- i. A pressão parcial de dióxido de carbono no equilíbrio depende apenas da temperatura (equilíbrio heterogêneo com um único gás). Assim, a adição de CO_2 apenas desloca o equilíbrio no sentido da formação de carbonato até que a pressão (e, portanto, a quantidade de moléculas de gás, a T e V constantes) retorne ao valor original.
- ii. Como a reação é endotérmica, o aumento da temperatura desloca a reação no sentido direto, aumentando a quantidade de dióxido de carbono no equilíbrio.